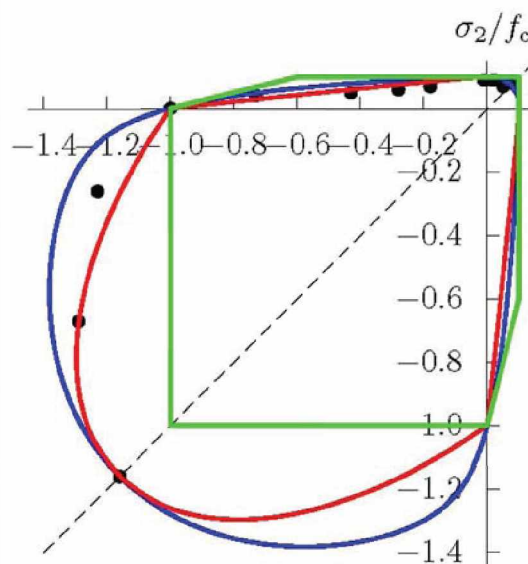
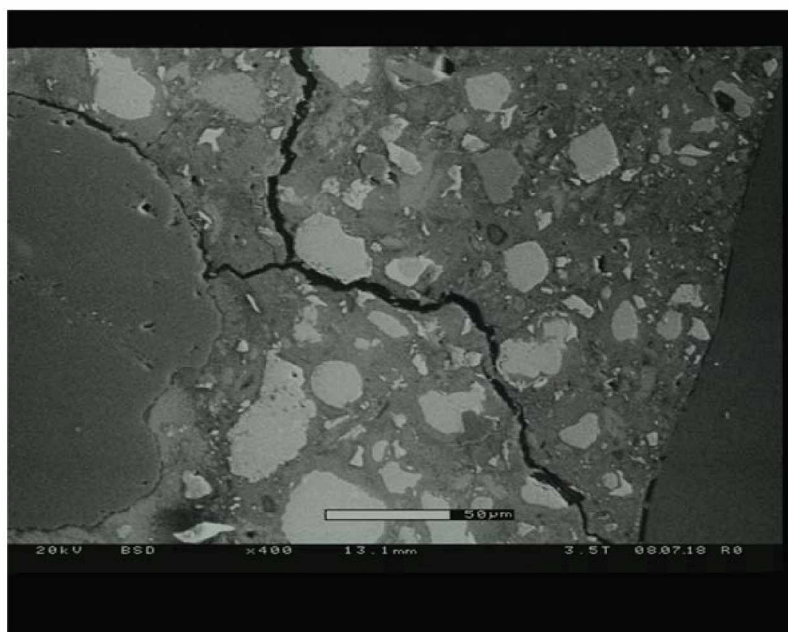


REIJO KOUHIA

## Betonin ajasta riippumattomat materiaalimallit





Reijo Kouhia

# Betonin ajasta riippumattomat materiaalimallit

Liikenneviraston tutkimuksia ja selvityksiä 38/2013

Liikennevirasto  
Helsinki 2013

*Kannen kuva: Andrzej Cwirzen*

Verkkojulkaisu pdf ([www.liikennevirasto.fi](http://www.liikennevirasto.fi))

ISSN-L 1798-6656

ISSN 1798-6664

ISBN 978-952-255-303-4

Liikennevirasto

PL 33

00521 HELSINKI

Puhelin 0295 34 3000

**Reijo Kouhia: Betonin ajasta riippumattomat materiaalmallit.** Liikennevirasto, infra- ja ympäristöosasto. Helsinki 2013. Liikenneviraston tutkimuksia ja selvityksiä 38/2013. 83 sivua. ISSN-L 1798-6656, ISSN 1798-6664, ISBN 978-952-255-303-4.

**Avainsanat:** betoni, murtoehto, vauriomalli, Abaqus-elementtimenetelmäohjelma

## Tiivistelmä

Tässä raportissa esitellään joitain betonin ajasta riippumattoman käyttäytymisen kuvaamiseen tarkoitettuja konstitutiivisia malleja ja selvitetään niiden perusoletuksia.

Raportti alkaa jännitys- ja muodonmuutostilan peruskäsitteiden sekä betonin mekaanisen käyttäytymisen peruspiirteiden esittelyllä. Vaurioehto- ja havainnollistamiseksi esitetään deviatorisen tason ja meridiaaniviivojen käsitteet. Klassisista paineriippuvista murtoehdoista käsitellään Rankinen maksimipääjännitysehto, St. Venantin maksimivenyäehto sekä Druckerin-Pragerin ja Mohrin-Colombin ehdot. Nämä ehdot ovat kuitenkin liian yksinkertaisia betonin murtumisen kuvaamiseen. Kolmiparametrinen vetokatkaistu Mohrin-Coulombin ehto on yksinkertaisin murtoehto, jota voidaan suhteellisen hyvin soveltaa betonille.

Erityisesti betonille suunnitelluista murtoehdoista esitetään Willamin ja Warnken kolmi- ja viisiparametriset mallit sekä Ottosenin että Lublinerin mallit. Ottosenin malli on eräs parhaimmista betonin mekaanista käyttäytymistä murtotilanteessa kuvaavista malleista. Murtoehdon muoto deviatorisella tasolla riippuu hydrostaattisesta paineesta ja sen meridiaaniviivat ovat kaarevia. Siinä on neljä kokeista määritettävää materiaa- liva- kiota. Se on myös valittu fib'in (*fédération internationale du béton*) mallinormiin.

Yhtenä raportin tarkoituksena on ollut Abaqus ohjelmiston kehittyneimmän betonille soveltuvan vaurioituvan kimmoplastisen aineen mallin kuvaaminen. Tämä malli pohjautuu Lublinerin malliin, jota on täydennetty Leen väitöskirjatutkimuksessa kehitetyllä vauriomallilla. Tämä malli soveltuu niin betonin dynaamiseen kuin staattiseen analysointiin. Tässä raportissa ei kuitenkaan ole esitetty dynaamisen mallin parametrien nopeusriippuvuuden käsittelyä. Mallin johtoajatuksena on ollut materiaalin vauriokäyttäytymisen kuvaaminen siten, että vaurioparametrien evoluution määrittämiseksi tarvitaan vain yksiakseliset puristus- ja vetokokeet. Jotta vaurion evoluutioyhtälö voidaan muodostaa, kokeet on kuitenkin ulotettava materiaalin myötöpehmenemisalueelle, joka vaikeuttaa kokeiden suorittamista.

**Reijo Kouhia: Materialmodeller för betong som är oberoende av tid.** Trafikverket, infrastruktur och miljö. Helsingfors 2013. Trafikverkets undersökningar och utredningar 38/2013. 83 sidor. ISSN-L 1798-6656, ISSN 1798-6664, ISBN 978-952-255-303-4.

## Sammanfattning

Denna rapport innehåller några konstitutiva modeller för att beskriva betongens beteende oberoende av tid samt redogöra för modellernas grundprinciper.

Rapporten inleds med en presentation av de grundläggande begreppen i fråga om spänningstillstånd och formförändring samt grunddragen för betongens mekaniska beteende. För att åskådliggöra skadekriterierna introduceras begreppen deviatoriskt plan och meridianlinjer. Av de klassiska tryckberoende brottkriterierna behandlas Rankines maximala huvudspänningskriterium, Saint Venants maximala töjningskriterium samt Drucker-Pragers och Mohr-Coulombs kriterier. Dessa kriterier är emellertid för enkla för att beskriva betongbrott. Mohr-Coulombs treparametriska brott genom dragspänning är det enklaste brottkriteriet som passar relativt bra för betong.

Av brottkriterierna som planerats särskilt för betong presenteras Willam och Warnkes tre- och femparametriska modeller samt Ottosens och Lubliners modeller. Ottosens modell är en av de modeller som bäst beskriver betongens mekaniska beteende i en brottsituation. Brottkriteriets form på det deviatoriska planet beror på det hydrostatiska trycket och den har böjda meridianlinjer. Den har fyra materialkonstanter som fastställs genom försök. Den har också valts till fib:s (*fédération internationale du béton*) modellnorm.

Ett av syftena med rapporten var att i programvaran Abaqus beskriva en modell för hur det elastoplastiska ämnet som skadas lämpar sig för mognare betong. Den här modellen baserar sig på Lubliners modell, som har kompletterats med skadmodellen som utvecklats i Lees doktorsavhandling. Denna modell lämpar sig såväl för dynamisk som statisk analys av betong. Den nämner dock inte hur man hanterat parametrarnas avhängighet av hastighet i den dynamiska modellen. Den ledande tanken i modellen har varit att beskriva materialets skadebeteende på ett sådant sätt att det bara behövs enaxliga tryck- och dragförsök för att fastställa skadeparametrarnas utveckling. För att man ska kunna ställa upp en evolutionsekvation, måste försöken emellertid även omfatta materialets töjningsmjuknande egenskaper, vilket försvårar utförandet av försöken.

**Reijo Kouhia: Materialmodeller för betong som är oberoende av tid.** Finnish Transport Agency, Infrastructure and the Environment. Helsinki 2013. Research reports of the Finnish Transport Agency 38/2013. 83 pages. ISSN-L 1798-6656, ISSN 1798-6664, ISBN 978-952-255-303-4.

## Summary

In this report some constitutive models for the description of time independent behavior of concrete are described and the underlying assumptions are clarified.

The report begins with a brief review of the basic concepts of stress- and strain states as well as the fundamental features of the mechanical behavior of concrete. For the illustration of a failure surface the deviatoric plane and the meridian lines are described. For the classical pressure dependent failure surfaces the Rankine's maximum principal stress, the maximum principal strain, Drucker-Prager and the Mohr-Coulomb criteria are presented. The simplest failure surface which captures the basic features of the load carrying capacity of concrete is the three-parametric Mohr-Coulomb failure surface with tension cut-off.

Especially developed for the analysis of concrete the three- and five parametric failure surfaces of Willam and Warnke and the models by Ottosen and Lubliner are described. The Ottosen's model is one of the best models describing the failure stress state of concrete. It's locus on the deviatoric plane depends on pressure and the meridian lines are curved. It has four parameters to be determined from the experiments and it is included in the fib's (*fédération internationale du béton*) model code.

One of the purposes of this report is the description of the damaging elasto-plastic model, which is the most advanced model available for the analysis of concrete in the Abaqus program. It is based on the Lubliner's model and enhanced with the damage model developed by Lee in his doctoral thesis. This model can be used both for dynamic and static analyses. However, the dynamic features of this model are not described in this report. The basic idea of this model is to describe the evolution of the damage process by means of data obtained only from uniaxial compression and tensile tests. However, for the proper evaluation of the damage evolution equation the tests have to be extended well into the strain-softening region, which makes the execution of the tests demanding.

## Esipuhe

Tämä katsaus betonin ajasta riippumattomiin materiaalimalleihin on tehty Liikenneviraston toimeksiannosta. Raportin on kirjoittanut Reijo Kouhia Aalto-yliopiston rakennustekniikan laitokselta, nykyisin Tampereen teknillisen yliopiston teknisen suunnittelun laitoksella.

Työtä ohjasivat dipl.ins. Tuomo Viitala ja dipl.ins. Ville-Pekka Lilja Liikennevirastosta.

Helsingissä elokuussa 2013

Liikennevirasto

Infra- ja ympäristöosasto



# Sisältö

<b>1</b>	<b>Johdanto</b>	<b>10</b>
1.1	Materiaali . . . . .	10
1.2	Rajaukset . . . . .	10
1.3	Betonin mallinnusparadigmat . . . . .	10
1.4	Konstitutiivisen mallinnuksen yleisiä periaatteita . . . . .	11
1.5	Merkinnät . . . . .	12
<b>2</b>	<b>Jännitys- ja muodonmuutostila</b>	<b>14</b>
2.1	Jännitystila . . . . .	14
2.1.1	Jännitystensori ja Cauchyn jännitysteoreema . . . . .	14
2.1.2	Koordinaatistonmuutos . . . . .	15
2.1.3	Pääjännitykset ja -akselit . . . . .	15
2.1.4	Deviatorinen jännitys . . . . .	16
2.1.5	Oktaedrijännitykset . . . . .	17
2.1.6	Keskimääräiset jännitykset . . . . .	17
2.1.7	Pääleikkausjännitykset . . . . .	18
2.1.8	Jännitystilan ja -invarianttien geometrinen tulkinta . . . . .	18
2.2	Muodonmuutostensori . . . . .	20
2.2.1	Muodonmuutoksen käsite . . . . .	20
2.2.2	Päävenymät . . . . .	21
2.2.3	Deviatorinen muodonmuutostensori . . . . .	22
<b>3</b>	<b>Betonin mekaanisen käyttäytymisen peruspiirteet</b>	<b>23</b>
3.1	Johdanto . . . . .	23
3.2	Käyttäytyminen yksiakselisissa jännitystilassa . . . . .	23
3.3	Kimmomoduuli . . . . .	24
3.4	Poissonin luku . . . . .	26
3.5	Käyttäytyminen toistuvassa yksiakselisessa kuormituksessa . . . . .	26
3.6	Säröä ajava voima . . . . .	26

3.7	Karakteristinen pituus . . . . .	27
3.8	Käyttäytyminen kaksiakselisessa jännitystilassa . . . . .	28
3.9	Käyttäytyminen hydrostaattisessa puristuksessa . . . . .	28
<b>4</b>	<b>Materiaalin vaurioehdot</b>	<b>30</b>
4.1	Murto- ja myötöehtojen yleisiä ominaisuuksia . . . . .	30
4.2	Deviatorinen taso . . . . .	30
4.3	Meridiaaniviivat . . . . .	30
4.4	Paineesta riippumattomat myötöehdot . . . . .	31
4.4.1	Von Misesin myötöehto . . . . .	31
4.4.2	Trescan myötöehto . . . . .	32
<b>5</b>	<b>Betonille soveltuvia murtoehtoja</b>	<b>34</b>
5.1	Betonin murtoehdon ominaispiirteitä . . . . .	34
5.1.1	Deviatorinen taso . . . . .	34
5.1.2	Meridiaanileikkaukset . . . . .	34
5.2	Rankinen maksimijännitysehto . . . . .	34
5.3	Maksimipäävenymämurtoehto . . . . .	36
5.4	Druckerin-Pragerin ehto . . . . .	38
5.5	Mohrin-Coulombin ehto . . . . .	40
5.6	Willamin-Warnken mallit . . . . .	44
5.7	Ottosenin malli . . . . .	50
5.7.1	Koetulosten sovitukset . . . . .	53
5.8	Lublinerin malli . . . . .	55
5.9	Muita murtoehtoja . . . . .	58
5.10	Murtopintojen vertailu . . . . .	58
5.11	Myötölujeneminen ja -pehmeneminen . . . . .	58
5.11.1	Yksiakselialinen käyttäytyminen . . . . .	58
5.11.2	Yleistys . . . . .	63
5.12	Yhteenveto . . . . .	63
<b>6</b>	<b>CDM-mallit</b>	<b>65</b>
6.1	Johdanto . . . . .	65
6.2	Isotrooppisen vaurion mittaaminen . . . . .	66
6.3	Leen ja Fenvesin malli . . . . .	67
6.3.1	Vaurioituva kimmoplastinen malli . . . . .	67
6.3.2	Sisäisten muuttujien evoluutioyhtälöt . . . . .	68
6.3.3	Vauriomallin mukauttaminen sykliseen kuormitukseen . . . . .	71
6.3.4	Vauriomallin parametrien määrittäminen . . . . .	72

<b>7</b>	<b>Abaqus-ohjelman betonimallit</b>	<b>73</b>
7.1	Johdanto . . . . .	73
7.2	Vaurioituvan aineen kimmoplastinen malli . . . . .	73
7.2.1	Myötöpinta . . . . .	76
7.2.2	Plastinen potentiaali . . . . .	77
7.3	Vauriomallin parametrien lähtötiedot . . . . .	77
7.3.1	Vauriomallin määrittely vedossa . . . . .	77
7.3.2	Vauriomallin määrittely puristuksessa . . . . .	80
<b>8</b>	<b>Yhteenveto</b>	<b>81</b>

# Luku 1

## Johdanto

### 1.1 Materiaali

Betoni on sementin, veden ja runkoaineen muodostama seos. Runkoaines muodostaa suurimman osuuden, yleensä noin 80 % betonin tilavuudesta [3, Luku 3.1]. Sideaineen, sementin osuus betonin painosta on noin 12-14 % ja veden osuus tuoreesta betonimassasta on 6-8 %.

Tämän raportti keskittyy betonin lujuuteen, joka on rakennesuunnittelun kannalta yhden tärkeimmistä ominaisuuksista. Betonit jaotellaan normaalibetoneihin, joiden yksiakselinen kuutiopuristuslujuus on välillä 20 – 60 MPa ja korkealujuusbetoneihin kun se on välillä 60–120 MPa. Betonin lujuuteen vaikuttavat useat tekijät. Tärkeimpinä ovat betonin runkoaineen lujuus, sementtigeelin huokoisuus, johon vaikuttaa suhteutuksen vesi-sementtisuhde ja suurirakeisten runkoainepartikkelien ja sementtiliiman välinen rajakerros, jonka lujuus yleensä määrää normaalibetonin lujuuden.

### 1.2 Rajaukset

Tämä raportti keskittyy vain betonin ajasta riippumattomiin ainemalleihin. Siten pitkäaikaisen kuormituksen aiheuttamaa virumista eikä erittäin nopeissa kuormituksissa tapahtuvia viskoplastisia efektejä käsitellä.

### 1.3 Betonin mallinnusparadigmat

Halkeilun mallintaminen on yksi oleellisimmista ja vaikeimmin kuvattavissa olevista betonin käyttäytymispiirteistä. Halkeiluprosessin mallintamisen lähestymistavat voidaan karkeasti ottaen jakaa kolmeen kategoriaan [13].

1. Diskreetit halkeilumallit.
  - (a) Lineaariseen elastiseen murtumismekaniikkaan perustuvat
  - (b) Epälineaariset halkeilumallit jotka perustuvat kuvitteelliseen säröön tai epälineaariseen murtumismekaniikkaan.

2. Tasoitetut halkeilumallit (engl. smeared crack models) [22].
  - (a) Suuntaansa muuttamattoman särön mallit (engl. fixed crack models).
  - (b) Kiertyvän särön mallit (engl. rotating crack models).
3. Jatkuvan vaurion mallit (eng. continuum damage models CDM). Tätä mallirypästä Lee kutsuu plastisuusteoriaan perustuviksi halkeilumalleiksi [13, sivu 3]. Nimityksen voi ymmärtää viittaavan CDM-mallien puutteeseen mallintaa epäelastista käyttäytymistä ilman plastista osuutta.

Betonin mekaanista käyttäytymistä kuvaavan mallin on kyettävä kuvaamaan kuormituksen aikaansaamaa vaurioitumista sekä myös plastista muodonmuutosta. Täten uusimmat betonimallit yhdistävät plastisuusteorian mallin jatkuvan vaurion malliin.

## 1.4 Konstitutiivisen mallinnuksen yleisiä periaatteita

Konstitutiiviset yhtälöt kuvaavat materiaalin makroskooppista käyttäytymistä, joka johtuu materiaalin sisäisen rakenteen muutoksista. Klassinen tapa formuloida konstitutiivisia yhtälöitä on tarkastella erikseen erilaisia käyttäytymismuotoja, kuten elastinen-, plastinen, viskoelastinen, viskoplastinen, vaurioituva, jne. Modernissa kontinuumimekaniikan käsittelytavassa taas lähdetään liikkeelle hyvin yleisistä funktionaalisista konstitutiivisista yhtälöistä ja tietyistä hyvin yleisistä periaatteista, jotka asettavat rajoituksia kyseisten yhtälöiden muodolle. Näistä yleisistä periaatteista tärkeimmät ovat termodynamiikan pääsäännöt.

## 1.5 Merkinnät

### *Muodonmuutos- ja jännitysmerkinnät*

$\mathbf{e}, e_{ij}$	=	deviatorinen muodonmuutostensori
$\mathbf{s}, s_{ij}$	=	deviatorinen jännitystensori
$s_1, s_2, s_3$	=	deviatorisen jännitystensorin pääarvot
$\gamma$	=	leikkausmuodonmuutos
$\gamma_{\text{oct}}$	=	oktaedrileikkausmuodonmuutos
$\boldsymbol{\varepsilon}_{ij}$	=	muodonmuutostensori
$\varepsilon_{\text{oct}}$	=	oktaedrimuodonmuutos
$\varepsilon_v$	=	suhteellinen tilavuudenmuutos
$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$	=	päävenymät
$\sigma$	=	normaalijännitys
$\boldsymbol{\sigma}, \sigma_{ij}$	=	jännitystensori
$\sigma_m$	=	keskimääräinen jännitys
$\sigma_e$	=	tehollinen jännitys (von Mises), $\sigma_m = \sqrt{3J_2}$
$\sigma_{\text{oct}}$	=	oktaedrijännitys
$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$	=	pääjännitykset
$\tau$	=	leikkausjännitys
$\tau_m$	=	keskimääräinen leikkausjännitys
$\tau_{\text{mc}}$	=	keskimääräinen leikkausjännitys puristusmeridiaanilla
$\tau_{\text{mt}}$	=	keskimääräinen leikkausjännitys vetomeridiaanilla
$\tau_{\text{oct}}$	=	oktaedrileikkausjännitys
$\bar{\sigma}_m$	=	dimensioton keskimääräinen jännitys $\bar{\sigma}_m = \sigma_m/f_c$
$\bar{\sigma}_e$	=	dimensioton tehollinen jännitys $\bar{\sigma}_e = \sigma_e/f_c$

### *Invariantit*

$I_1 = \text{tr} \boldsymbol{\sigma} = \sigma_{ii}$	=	jännitystensorin ensimmäinen invariantti (lineaarinen)
$I_{1c}$	=	$I_1$ :n arvo puristusmeridiaanilla
$I_{1t}$	=	$I_1$ :n arvo vetomeridiaanilla
$I_2 = \frac{1}{2}[\text{tr} \boldsymbol{\sigma}^2 - (\text{tr} \boldsymbol{\sigma})^2]$	=	jännitystensorin toinen invariantti (neliöllinen)
$I_3 = \det \boldsymbol{\sigma}$	=	jännitystensorin kolmas invariantti (astetta kolme)
$J_2 = \frac{1}{2} \text{tr} \mathbf{s}^2$	=	deviatorisen jännitystensorin toinen invariantti (neliöllinen)
$J_3 = \det \mathbf{s}$	=	deviatorisen jännitystensorin kolmas invariantti (astetta kolme)
$\bar{I}_1 = \text{tr} \boldsymbol{\varepsilon} = \varepsilon_{ii}$	=	muodonmuutostensorin ensimmäinen invariantti
$\bar{I}_2 = \frac{1}{2}[\text{tr} \boldsymbol{\varepsilon}^2 - (\text{tr} \boldsymbol{\varepsilon})^2]$	=	muodonmuutostensorin toinen invariantti
$\bar{I}_3 = \det \boldsymbol{\varepsilon}$	=	muodonmuutostensorin kolmas invariantti

$\xi, \rho, \theta$	=	Heigh-Westergaard jännityskoordinaatit
$\xi$	=	hydrostaattinen pituus
$\rho$	=	deviatorisen säteen pituus
$\rho_c$	=	deviatorisen säteen arvo puristusmeridiaanilla
$\rho_t$	=	deviatorisen säteen arvo vetomeridiaanilla
$\theta$	=	Loden kulma deviatorisella tasolla

### Materiaaliparametrit

$A, a, B, b$	=	Ottosenin murtoehdon parametreja
$c$	=	koheesio
$E$	=	kimmomoduuli
$f_{bc}$	=	kaksiakselinen puristuslujuus ( $\sigma_2 = \sigma_3 = -f_{bc}$ )
$f_c$	=	yksiakselinen sylinteripuristuslujuus
$f_t$	=	yksiakselinen vetolujuus
$\bar{f}_{bc}$	=	biaksiaalisen puristuslujuuden suhde yksiakseliseen puristuslujuuteen
$\bar{f}_{bt}$	=	biaksiaalisen vetolujuuden suhde yksiakseliseen puristuslujuuteen
$\bar{f}_t$	=	yksiakselisen vetolujuuden suhde yksiakseliseen puristuslujuuteen
$G$	=	leikkausmoduuli
$G_f$	=	säröä ajava voima
$K$	=	kokoonpuristuvuusmoduuli
$K_1, K_2, k_1, k_2$	=	Ottosenin murtoehdon parametreja
$k$	=	materiaalin leikkauslujuus
$l_{ch}$	=	karakteristinen pituus
$m$	=	yksiakselisten puristus- ja vetolujuuksien suhde $f_c = m f_t$
$\alpha, \beta$	=	Druckerin-Pragerin murtoehdon parametreja
$\nu$	=	Poissonin vakio
$\phi$	=	Mohrin-Coulombin ehdon materiaalin sisäinen kitkakulma

# Luku 2

## Jännitys- ja muodonmuutostila

### 2.1 Jännitystila

#### 2.1.1 Jännitystensori ja Cauchyn jännitysteoreema

Cauchyn postulaatin mukaan kontinuumikappaleen mielivaltaisen pisteen  $P$  traktio eli jännitysvektori  $\mathbf{t}$  määritellään

$$\mathbf{t} = \frac{d\mathbf{f}}{dA}, \quad (2.1)$$

jossa  $d\mathbf{f}$  on differentiaaliseen pinta-ala-alkioon  $dA$  vaikuttava differentiaalinen voima-vektori. Traktiovektori riippuu tarkasteltavan ”leikkauspinnan” suunnasta, jota karakterisoi pinnan normaalin suuntainen yksikkövektori  $\mathbf{n}$ . Cauchyn jännitysteoreema

$$\mathbf{t}(P, \mathbf{n}) = [\boldsymbol{\sigma}(P)]^T \mathbf{n}(P) \quad (2.2)$$

antaa traktiovektorin  $\mathbf{t}$  ja jännitystensorin  $\boldsymbol{\sigma}$  välisen yhteyden. Karteesisessa suorakulmaisessa koordinaatistossa ilmaistuna jännitystensori on muotoa

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}. \quad (2.3)$$

Oikeanpuoleisin muoto tunnetaan von Karmanin esitystavaksi ja siinä  $\sigma$ -symboli kuvaa jännityksen normaalikomponentteja ja  $\tau$  vastaavasti leikkausjännityksiä. Merkintätapa on yleinen insinöörikirjallisuudessa.

Jännitystensorin alkioiden indeksien merkitys on määritelty yhtälössä 2.2. Tässä esityksessä käytetään insinöörikirjallisuudessa yleisesti käytettyä tapaa assosoida jännitystensorin komponenttien ensimmäinen indeksi pinnan normaalin suuntaan ja toinen itse komponentin suuntaan.



## 2.1.2 Koordinaatistonmuutos

Olkoon  $x_i$  ja  $x'_i$  kaksi oikeakätistä suorakulmaista koordinaatistosysteemiä joiden origot yhtyvät. Merkitään koordinaattiakselien välisiä suuntakosineita  $l_{ij} = \cos(x'_i, x_j)$ . Jännitystensorin komponentit muuttuvat tällöin seuraavien muunnoskaavojen mukaisesti

$$\sigma'_{ij} = l_{im}l_{jn}\sigma_{mn}, \quad \sigma_{ij} = l_{mi}l_{nj}\sigma'_{mn}, \quad (2.4)$$

jossa on käytetty Einsteinin summaussääntöä kahdesti toistuvan indeksin suhteen. Matriisimuodossa kirjoitettuna koordinaatistonmuunnos on muotoa

$$\boldsymbol{\sigma}' = \mathbf{L}\boldsymbol{\sigma}\mathbf{L}^T, \quad \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{L}^T\boldsymbol{\sigma}'\mathbf{L}. \quad (2.5)$$

## 2.1.3 Pääjännitykset ja -akselit

Pääjännitykset  $\sigma$  saadaan ratkaisemalla ominaisarvotehtävä

$$(\sigma_{ij} - \sigma\delta_{ij})n_j, \quad (2.6)$$

jossa vektori  $n_i$  määrittelee pääjännitystason normaalin suunnan. Jotta homogeenisella yhtälösystemillä (2.6) olisi ratkaisu, on kerroinmatriisin oltava singulaarinen, joten sen determinantilla on nolla-arvo. Tästä ehdosta saadaan karakteristinen yhtälö<sup>1</sup>

$$-\sigma^3 + I_1\sigma^2 + I_2\sigma + I_3 = 0. \quad (2.7)$$

Kertoimet  $I_i, i = 1, \dots, 3$  ovat

$$I_1 = \text{tr}\boldsymbol{\sigma} = \sigma_{ii} = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}, \quad (2.8)$$

$$I_2 = \frac{1}{2}[\text{tr}(\boldsymbol{\sigma}^2) - (\text{tr}\boldsymbol{\sigma})^2] = \frac{1}{2}(\sigma_{ij}\sigma_{ji} - I_1^2), \quad (2.9)$$

$$I_3 = \det(\sigma_{ij}). \quad (2.10)$$

Karakteristisen yhtälön ratkaisuna ovat jännitystensorin ominaisarvot, eli pääjännitykset  $\sigma_1, \sigma_2$  ja  $\sigma_3$ , jotka usein numeroidaan suuruuden mukaan seuraavasti:  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ .

Suureet  $I_1, I_2$  ja  $I_3$  ovat valitusta koordinaatistosta riippumattomia suureita, eli invariantteja, kuten myös pääjännitykset. Invariantteilla on ainemallien muodostamisessa hyvin keskeinen rooli.

Mikäli koordinaattiakseleiksi valitaan pääjännitysakselisto, eli pääjännitystason normaalien  $n_i$  (2.6) määrittelemät suunnat, muuntuu jännitystensori diagonaaliseksi

$$\boldsymbol{\sigma} = [\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix}. \quad (2.11)$$

<sup>1</sup>Karakteristisessa yhtälössä esiintyviä invariantteja kutsutaan usein myös pääinvariantteiksi. Huomaa, että yhtälössä esiintyvä toinen invariantti määritellään usein tässä esitetyn invariantin vastalukuna. Tässä esityksessä määritellään sekä itse tensorin, että sen deviaattorin invariantit samalla tavalla. Tätä loogista merkintätapaa on käytetty myös lähteessä [17].

Invariantit  $I_1, \dots, I_3$  saavat pääjännitysten avulla ilmaistuna muodon

$$I_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3, \quad (2.12)$$

$$I_2 = -\sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_3\sigma_1, \quad (2.13)$$

$$I_3 = \sigma_1\sigma_2\sigma_3. \quad (2.14)$$

#### 2.1.4 Deviatorinen jännitys

Jännitystensori voidaan jakaa additiivisesti puhdasta leikkausta kuvaavaan deviatoriseen ja hydrostaattista jännitystä ilmaisevaan isotrooppiseen osaan. Deviatorinen jännitystensori  $\mathbf{s}$  määritellään

$$s_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma_m \delta_{ij}, \quad (2.15)$$

jossa  $\sigma_m = \frac{1}{3}I_1 = \frac{1}{3}\sigma_{kk}$  on keskimääräinen jännitys. Deviatoriselle jännitystensorille käytetään kirjallisuudessa toisinaan myös merkintää  $\boldsymbol{\sigma}'$ . Määritelmästä (2.15) havaitaan, että deviatorisen jännitystensorin jälki häviää

$$\text{tr } \mathbf{s} = 0. \quad (2.16)$$

Deviatorisen jännitystensorin ominaisarvot  $s$  saadaan yhtälöstä

$$|s_{ij} - s\delta_{ij}| = 0, \quad (2.17)$$

joka tuottaa karakteristisen polynomin

$$-s^3 + J_1s^2 + J_2s + J_3 = 0, \quad (2.18)$$

jossa  $J_1, \dots, J_3$  ovat deviatorisen jännitystensorin invariantit. Näille saadaan lausekkeet

$$J_1 = \text{tr } \mathbf{s} = s_{ii} = s_x + s_y + s_z = 0, \quad (2.19)$$

$$J_2 = \frac{1}{2}[\text{tr}(\mathbf{s}^2) - (\text{tr } \mathbf{s})^2] = \frac{1}{2}\text{tr}(\mathbf{s}^2) = \frac{1}{2}s_{ij}s_{ji} \quad (2.20)$$

$$= \frac{1}{6}[(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2] + \tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2 \quad (2.21)$$

$$= \frac{1}{6}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2], \quad (2.22)$$

$$J_3 = \det \mathbf{s}. \quad (2.23)$$

Deviatorinen jännitystensori on saatu jännitystensorista vähentämällä siitä isotrooppinen hydrostaattinen jännitystensori. Täten deviatorisen jännitystensorin pääsuunnat yhtyvät jännitystensorin pääsuuntiin. Täten myös deviatorisen osan pää- eli ominaisarvot suhtautuvat pääjännityksiin seuraavasti

$$\begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \sigma_m \\ \sigma_m \\ \sigma_m \end{bmatrix}. \quad (2.24)$$

Deviatorisen osan invariantit lausuttuna pääarvojen avulla ovat

$$J_2 = \frac{1}{2}(s_1^2 + s_2^2 + s_3^2), \quad (2.25)$$

$$J_3 = \frac{1}{3}(s_1^3 + s_2^3 + s_3^3) = s_1s_2s_3. \quad (2.26)$$

### 2.1.5 Oktaedrijännitykset

Oktaedrijännitystasoksi sanotaan tasoa jonka normaali muodostaa yhtäsuuren kulman jokaisen pääjännitys akselin kanssa. Oktaedritason normaalin lauseke pääjännityskoordinaatistossa on siten

$$\mathbf{n} = [n_1, n_2, n_3]^T = \frac{1}{\sqrt{3}}[1, 1, 1]^T \quad (2.27)$$

Oktaedritasossa vaikuttava normaalijännitys on

$$\sigma_{\text{oct}} = \sigma_{ij}n_i n_j = \sigma_1 n_1^2 + \sigma_2 n_2^2 + \sigma_3 n_3^2 = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = \sigma_m \quad (2.28)$$

ja leikkausjännitykselle saadaan lauseke

$$\tau_{\text{oct}}^2 = t_i t_i - \sigma_{\text{oct}}^2 = \sigma_{ij}\sigma_{ik}n_j n_k - (\sigma_{ij}n_i n_j)^2. \quad (2.29)$$

Pääjännitysten avulla lausuttuna oktaedrileikkausjännityksen lauseke on muotoa

$$\tau_{\text{oct}}^2 = \frac{1}{3}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2) - \frac{1}{9}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2 \quad (2.30)$$

$$= \frac{1}{9}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]. \quad (2.31)$$

Jännitysdeviaattorin toisen invariantin avulla lausuttuna oktaedrileikkausjännitys saa muodon

$$\tau_{\text{oct}} = \sqrt{\frac{2}{3}J_2}. \quad (2.32)$$

### 2.1.6 Keskimääräiset jännitykset

Tarkastellaan hyvin pientä pallomaista tilavuutta. Pallon pinnan pisteissä jännitystila voidaan kuvata pinnan normaalin suuntaisella normaalijännityksellä  $\sigma_n$  ja pallopinnan suuntaisella leikkausjännityskomponentilla  $\tau_s$ . Keskimääräinen normaalijännitys ja leikkausjännitys määritellään pallopinnalla laskettuna keskiarvona

$$\sigma_m = \lim_{S \rightarrow 0} \left( \frac{1}{S} \int_S \sigma_n dS \right), \quad (2.33)$$

$$\tau_m = \lim_{S \rightarrow 0} \left( \frac{1}{S} \int_S \tau_s^2 dS \right)^{1/2}. \quad (2.34)$$

Tuloksena on lausekkeet

$$\sigma_m = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = \frac{1}{3}I_1, \quad (2.35)$$

$$\tau_m = \frac{1}{\sqrt{15}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} = \sqrt{\frac{2}{5}J_2} = \sqrt{3/5}\tau_{\text{oct}}. \quad (2.36)$$

### 2.1.7 Pääleikkausjännitykset

Mohrin ympyröiden avulla on helppo todeta maksimileikkausjännityksen olevan puolet suurimmasta pääjännityserosta ja muodostavan  $45^\circ$  kulman vastaavien pääjännitysakselien kanssa. Suureita

$$\tau_1 = \frac{1}{2}|\sigma_2 - \sigma_3|, \quad \tau_2 = \frac{1}{2}|\sigma_1 - \sigma_3|, \quad \tau_3 = \frac{1}{2}|\sigma_1 - \sigma_2| \quad (2.37)$$

kutsutaan pääleikkausjännityksiksi ja täten

$$\tau_{\max} = \max(\tau_1, \tau_2, \tau_3) \quad (2.38)$$

tai

$$\tau_{\max} = \frac{1}{2}|\sigma_1 - \sigma_3|, \quad (2.39)$$

mikäli käytetään merkintätapaa  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ .

### 2.1.8 Jännitystilän ja -invarianttien geometrinen tulkinta

Kuusidimensioista jännitystensoria on hankala hahmottaa, mutta pääjännityskoordinaatistossa jännitystilän geometrinen havainnollistaminen onnistuu kätevästi. Ajatellaan kolmidimensioista euklidista avaruutta, jonka akseliston koordinaatiston muodostavat pääjännitykset  $\sigma_1, \sigma_2$  ja  $\sigma_3$ , kuva 2.1.

Tarkastellaan pistettä  $P(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ . Täten vektorin  $OP$  voidaan ajatella kuvaavan jännitystä. Hydrostaattisen akselin muodostaa suora  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$ , joka muodostaa yhtä suuren kulman jokaisen pääjännitysavaruuksien akselin suhteen. Hydrostaattisen akselin suuntainen yksikkönormaalivektori on siten

$$\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{3}}[1, 1, 1]^T. \quad (2.40)$$

Deviatorinen jännitystensori häviää hydrostaattisella akselilla jota vastaan kohtisuoraa tasoa nimitetään deviatoriseksi tasoksi. Origin kautta kulkevaa deviatorista tasoa, jolla

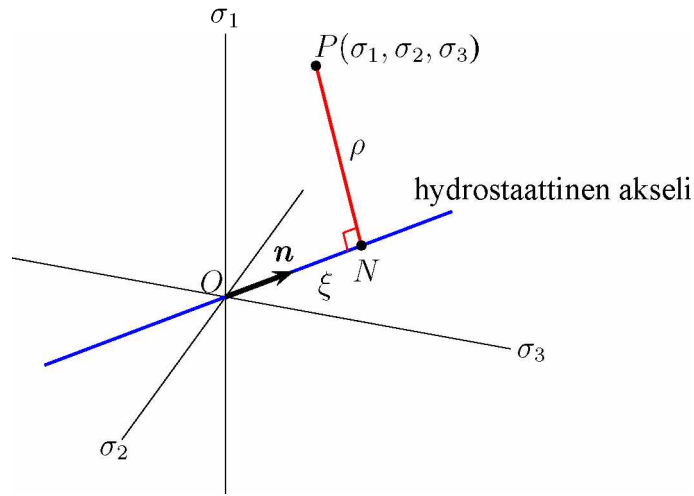
$$\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 0, \quad (2.41)$$

kutsutaan  $\pi$ -tasoksi. Tällä tasolla sijaitseva jännitystila kuvaa siten puhdasta leikkausjännitystilaa.

Vektori  $OP$  voidaan jakaa hydrostaattisen akselin suuntaiseen komponenttiin  $ON$  ja deviatorisella tasolla sijaitsevaan komponenttiin  $NP$ , jotka siis ovat kohtisuorassa toisiinsa vastaan.

Hydrostaattisen osan  $ON$  pituus on

$$\xi = |\vec{ON}| = \vec{OP} \cdot \mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{3}}I_1 = \sqrt{3}\sigma_m = \sqrt{3}\sigma_{\text{oct}}. \quad (2.42)$$



Kuva 2.1: Pääjännitysavaruuks.

Vektorin  $ON$  komponenttiesitys on

$$O\vec{N} = \begin{bmatrix} \sigma_m \\ \sigma_m \\ \sigma_m \end{bmatrix} = \frac{1}{3}I_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (2.43)$$

Deviatorisella tasolla sijaitseva vektori  $NP$  on vastaavasti

$$\vec{NP} = \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \sigma_m \\ \sigma_m \\ \sigma_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{bmatrix}. \quad (2.44)$$

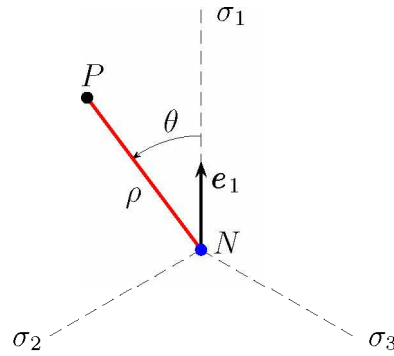
Vektorin  $\vec{NP}$  pituuden neliö on

$$\rho^2 = |\vec{NP}|^2 = s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 = 2J_2 = 3\tau_{\text{oct}}^2 = 5\tau_m^2. \quad (2.45)$$

Deviatorisen tason nimitys on yhtälön (2.44) perusteella hyvin ymmärrettävissä. Vain hydrostaattisen paineen arvoltaan eroavat jännitystilat sijaitsevat siten hydrostaattisen paineakselin kanssa yhdensuuntaisella suoralla.

Invarianteilla  $I_1$  ja  $J_2$  on siten selkeä fysikaalis-geometrinen tulkinta. Kuubinen invariantti  $J_3$  on yhteydessä deviatorisen tason avulla määriteltyyn Loden kulmaan  $\theta$ , joka on deviatoriselle tasolle projisoidun pääjännitys akselin  $\sigma_1$  ja vektorin  $\vec{NP}$  välinen kulma, katso kuvaa 2.2. Määritellään deviatoriselle tasolle projisoidun pääjännitys akselin  $\sigma_1$  suuntainen yksikkövektori  $e_1$ :

$$e_1 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}. \quad (2.46)$$



Kuva 2.2: Deviatorinen taso. Pääjännitysakseliens projektio deviatorisella tasolla on merkitty kuvaan katkoviivoilla.

Kulma  $\theta$  voidaan siten määrittää vektoreiden  $\vec{NP}$  ja  $e_1$  pistetulon avulla:

$$\vec{NP} \cdot e_1 = \rho \cos \theta, \quad (2.47)$$

jonka avulla saadaan

$$\cos \theta = \frac{1}{2\sqrt{3}J_2}(2s_1 - s_2 - s_3) = \frac{3}{2} \frac{s_1}{\sqrt{3}J_2} = \frac{2\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3}{2\sqrt{3}J_2}. \quad (2.48)$$

Trigonometrisen identiteetin

$$\cos 3\theta = 4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta \quad (2.49)$$

avulla saadaan

$$\cos 3\theta = \frac{3\sqrt{3}}{2} \frac{J_3}{J_2^{3/2}} = \frac{\sqrt{2}J_3}{\tau_{\text{oct}}^3}. \quad (2.50)$$

Koordinaattien  $\xi$ ,  $\rho$  ja  $\theta$  muodostamaan jännitystensorin kuvaamiseen muodostettua avaruutta kutsutaan Haigh-Westergaard jännitysavaruuksi.

## 2.2 Muodonmuutostensori

### 2.2.1 Muodonmuutoksen käsite

Tarkastellaan kontinuumikappaleen kahta lähekkäistä pistettä, joita deformaation alkuas-  
sa alkutilassa merkitään symboleilla  $P$  ja  $Q$ . Muodonmuutoksen tapahduttua nämä pisteet  
siirtyvät paikkoihin  $p$  ja  $q$ . Pisteiden  $Q$  suhteellinen siirtymä  $P$ :n suhteen määritellään

$$d\mathbf{u} = \mathbf{u}_Q - \mathbf{u}_P. \quad (2.51)$$

Vektorin  $\vec{PQ}$  pituutta merkitään  $dS$ :llä jolloin

$$\frac{du_i}{dS} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{dx_j}{dS}, \quad (2.52)$$

jossa Jacobin matriisi  $\mathbf{J} = \partial \mathbf{u} / \partial \mathbf{x}$  voidaan jakaa symmetriseen ja antimetriseen osaan

$$\mathbf{J} = \boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\gamma}, \quad (2.53)$$

jossa symmetrinen osa  $\boldsymbol{\varepsilon}$  on infinitesimaalinen muodonmuutostensori

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{bmatrix}, \quad (2.54)$$

ja antimetrisen osa  $\boldsymbol{\gamma}$  on rotaatiomatriisi. Siirtymien avulla kirjoitettuna muodonmuutostensori on

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}). \quad (2.55)$$

On huomattava, että rotaatiomatriisi kuvaa pisteen  $P$  lähiympäristön jäykän kappaleen kiertymää vain mikäli alkio  $\Omega_{ij}$  ovat pieniä.

## 2.2.2 Päävenymät

Päävenymät  $\varepsilon$  saadaan ratkaisemalla ominaisarvotehtävä

$$(\varepsilon_{ij} - \varepsilon \delta_{ij})n_j, \quad (2.56)$$

jossa vektori  $n_i$  määrittelee päävenymätason normaalin suunnan. Karakteristinen polynomi on

$$-\varepsilon^3 + \bar{I}_1 \varepsilon^2 + \bar{I}_2 \varepsilon + \bar{I}_3 = 0. \quad (2.57)$$

Muodonmuutosinvariantit  $\bar{I}_i, i = 1, \dots, 3$  ovat

$$\bar{I}_1 = \text{tr} \boldsymbol{\varepsilon} = \varepsilon_{ii} = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}, \quad (2.58)$$

$$\bar{I}_2 = \frac{1}{2}[\text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}^2) - (\text{tr} \boldsymbol{\varepsilon})^2] = \frac{1}{2}(\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ji} - \bar{I}_1^2), \quad (2.59)$$

$$\bar{I}_3 = \det(\varepsilon_{ij}). \quad (2.60)$$

Karakteristisen yhtälön ratkaisuna ovat muodonmuutostensorin ominaisarvot, eli päävenymät  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  ja  $\varepsilon_3$ .

Mikäli koordinaattiakseleiksi valitaan päävenymäakselit, eli päävenymätason normaalin  $n_i$  (2.56) määrittelemät suunnat, muuntuu muodonmuutostensori diagonaaliseksi

$$\boldsymbol{\varepsilon} = [\varepsilon_{ij}] = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{bmatrix}. \quad (2.61)$$

Invariantit  $\bar{I}_1, \dots, \bar{I}_3$  saavat päävenymien  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_3$  avulla ilmaistuna muodon

$$\bar{I}_1 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3, \quad (2.62)$$

$$\bar{I}_2 = -\varepsilon_1\varepsilon_2 - \varepsilon_2\varepsilon_3 - \varepsilon_3\varepsilon_1, \quad (2.63)$$

$$\bar{I}_3 = \varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3. \quad (2.64)$$

### 2.2.3 Deviatorinen muodonmuutostensori

Kuten jännitystensorikin, voidaan muodonmuutostensori jakaa additiivisesti deviatoriseen ja isotrooppiseen osaan:

$$\varepsilon_{ij} = e_{ij} + \frac{1}{3}\bar{I}_1\delta_{ij}, \quad (2.65)$$

jossa deviatorista muodonmuutostensoria merkitään symbolilla  $e$ . Kirjallisuudessa sille käytetään toisinaan myös merkintää  $\epsilon'$ . Deviatorisen jännitystensorin jälki häviää

$$\text{tr } e = 0. \quad (2.66)$$

Deviatorisen muodonmuutostensorin ominaisarvot  $e$  saadaan yhtälöstä

$$|e_{ij} - e\delta_{ij}| = 0, \quad (2.67)$$

joka tuottaa karakteristisen polynomin

$$-e^3 + \bar{J}_1e^2 + \bar{J}_2e + \bar{J}_3 = 0, \quad (2.68)$$

jossa invarianttien  $\bar{J}_1, \dots, \bar{J}_3$  lausekkeet ovat

$$\bar{J}_1 = \text{tr } e = e_{ii} = e_x + e_y + e_z = 0, \quad (2.69)$$

$$\bar{J}_2 = \frac{1}{2}[\text{tr}(e^2) - (\text{tr } e)^2] = \frac{1}{2}\text{tr}(e^2) = \frac{1}{2}e_{ij}e_{ji} \quad (2.70)$$

$$= \frac{1}{6}[(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)^2], \quad (2.71)$$

$$\bar{J}_3 = \det e = e_1e_2e_3. \quad (2.72)$$

Pienten muodonmuutosten tapauksessa muodonmuutostensorin ensimmäinen invariantti  $\bar{I}_1 = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z \equiv \varepsilon_v$  kuvaa suhteellista tilavuudenmuutosta (tai tilavuudenmuutosta yksikkötilavuutta kohti). Kuten jännityksille, voidaan määritellä oktaedrivenymät

$$\varepsilon_{\text{oct}} = \frac{1}{3}\bar{I}_1 = \frac{1}{3}\varepsilon_v, \quad (2.73)$$

$$\gamma_{\text{oct}}^2 = \frac{8}{3}\bar{J}_2. \quad (2.74)$$

Ensinäkemältä (2.74) saattaa vaikuttaa oudolta verrattuna oktaedrileikkausjännityksen lausekkeeseen (2.32), mutta on muistettava, että  $\gamma_{xy} = 2\varepsilon_{xy}$ , jne.



# Luku 3

## Betonin mekaanisen käyttäytymisen peruspiirteet

### 3.1 Johdanto

Tässä luvussa esitetään koetulosten valossa joitakin betonin mekaanisen käyttäytymisen peruspiirteitä. Näiden piirteiden huomioonotto on välttämätöntä konstitutiivisen mallin muodostamiselle. Samalla ne mahdollistavat malleissa esiintyvien parametrien järkevän määrittämisen.

Jo ennen ulkoista kuormitusta, betonissa on suuri joukko mikrosäröjä, erityisesti si-deaineena käytetyn sementin ja suurirakeisten runkoainepartikkelien välillä. Näiden mikrosäröjen kasvu aiheuttaa betonille tyypillisen epälineaarisen käyttäytymisen jo hyvin alhaisilla jännitystasoilla ja ne aiheuttavat murtotilaa lähestyttäessä kappaleen tilavuudenkasvua.

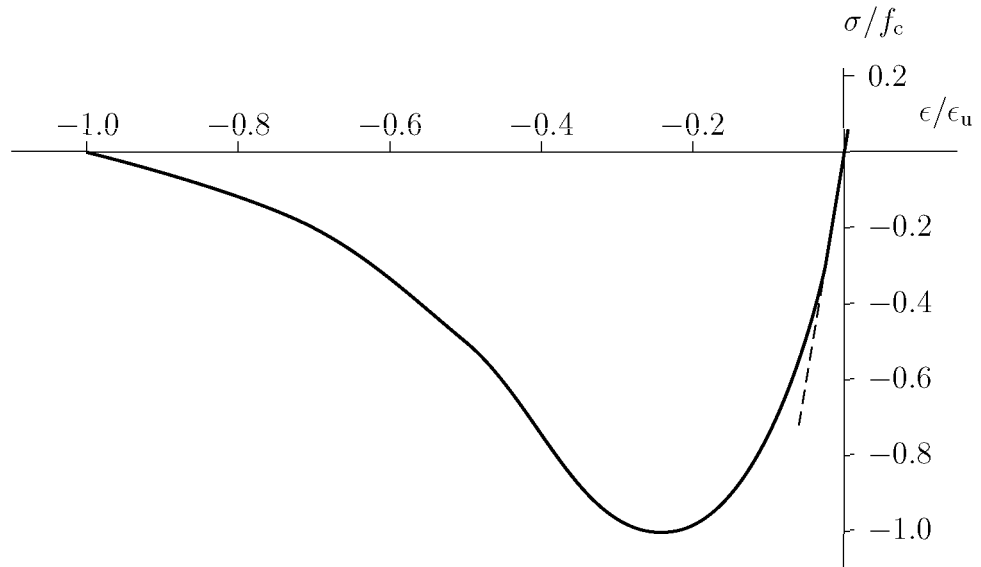
Mikrosäröt aiheutuvat sementtiliiman kutistumisesta ja termisistä jännityksistä. Ulkoisen kuormituksen alaisena mikrosäröjä syntyy myös runkoaineen ja sementtiliiman erilaisista jäykkyyksistä johtuvista jännityksistä. Runkoaineen ja sementtigeelin välisen rajapinnan vetolujuus on huomattavasti pienempi kuin kummankaan komponentit erikseen. Tämä on pääsyy betonin alhaiselle vetolujuudelle.

### 3.2 Käyttäytyminen yksiakselisissa jännitystilassa

Betonille tyypillinen jännitys-venymäkäyttäytyminen yksiakselisessa kuormituksessa on esitetty kuvassa 3.1, josta näkyy betonille ominainen suuri käyttäytymisero puristuksessa ja vedossa.

Betonin vetolujuus on yleensä vain alle 10% sen puristuslujuudesta. Lähteessä [7] on annettu seuraava koetuloksiin sovitettu regressiokäyrä veto- ja puristuslujuuden välille, joka soveltuu betoneille joiden puristuslujuus on välillä 20-120 MPa

$$f_t = f_{t0} \left( \frac{f_c}{f_{c0}} \right)^{n_t}, \quad (3.1)$$



Kuva 3.1: Betonin tyypillinen jännitys-venymäkuvaaja yksiakselisessa jännitystilassa.

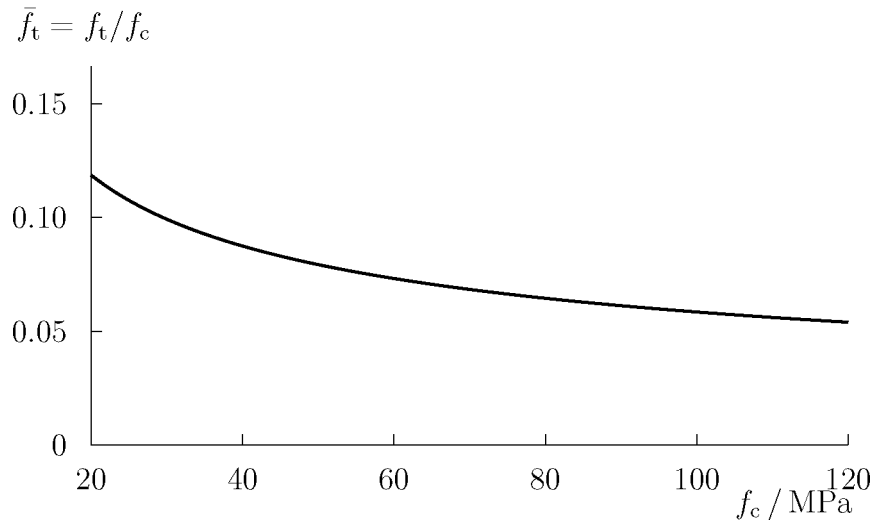
jossa  $f'_{t0} = 1,61$  MPa,  $f'_{c0} = 10$  MPa,  $n_t = 0,56$ . Kuvassa 3.2 on esitetty kaavan (3.1) antama puristuslujuuteen suhteutettu vetolujuus  $\bar{f}_t = f_t/f_c$ .

Yksiakselisessa puristuksessa jännitys-venymäkuvaaja on miltei lineaarinen jännitystasoilla, jotka ovat alle 30% betonin puristuslujuudesta  $f_c$ . Tämän jälkeen jännitys-venymäkäyrä kaareutuu yhä nopeammin, kunnes saavutetaan betonin puristumurtolujuus  $f_c$ , jota vastaava venymän arvo on noin 0,2–0,3 % betoneilla joiden puristumurtolujuus on välillä 20–120 MPa [7]. Puristumurtolujuuden saavuttamisen jälkeen seuraa pehmenemisivaihe, jonka muotoon vaikuttaa suuresti betonin lujuusluokka. Korkealujuusbetonit käyttäytyvät pehmenemisaueella hauraammin. Lopulta betoni murskautuu kun venymä saavuttaa arvon  $\epsilon_u$ , joka on 1% luokkaa.

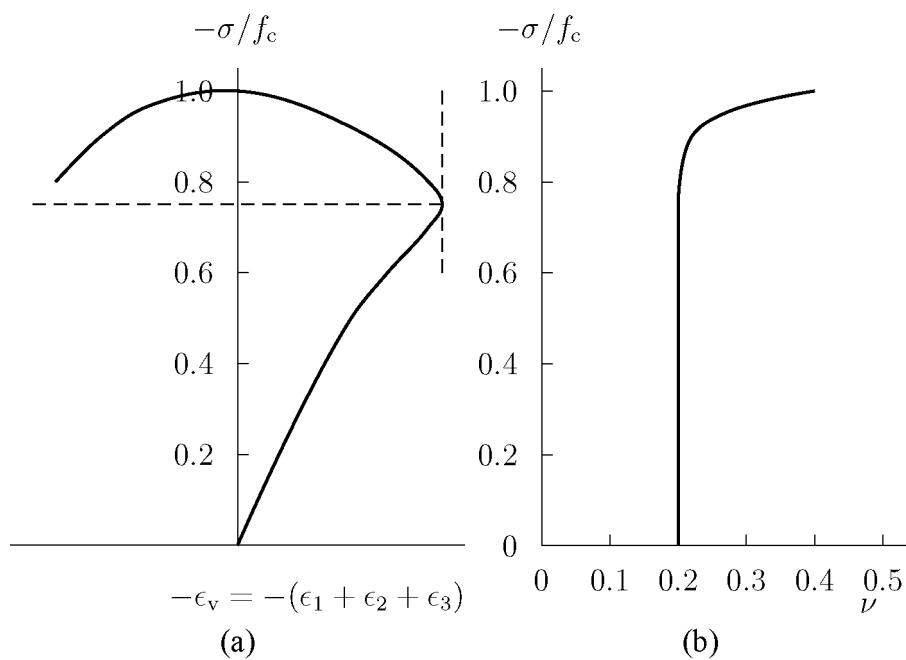
Puristuksessa kappaleen tilavuudenmuutos tapahtuu puristavan jännityksen suhteen miltei lineaarisesti jännitystasolle  $-0,75f_c$  saakka, jonka jälkeen tilavuudenmuutoksessa tapahtuu suunnan muutos. Jännitystasoa, jossa tilavuudenmuutoksella on minimiarvo kutsutaan kriittiseksi jännitykseksi, ja se on merkitty vaakasuoralla katkoviivalla kuvaan 3.3a.

### 3.3 Kimmomoduuli

Kimmomoduuli määritellään yksiakselisen jännitys-venymäkäyrän tangenttina origossa. Betonin kimmomoduuli riippuu suuresti runkoaineesta, sen raekoosta, sementistä sekä sementin ja runkoaineen välisestä tartuntavyöhykkeestä. Lähteessä [7] annetaan seuraava



Kuva 3.2: Betonin yksiakselinen vetolujuus suhteessa yksiakseliseen puristuslujuuteen fib:n regressiokaavan (3.1) mukaan.



Kuva 3.3: Betonin (a) tilavuudenmuutoksen ja (b) näennäisen Poissonin vakion riippuvuus jännitystilasta yksiakselisessa puristuksessa.

Taulukko 3.1: Runkoaineen vaikutus kimmokertoimeen.

runkoainestyyppi	$E_0/\text{GPa}$
Basaltti, tiheä kalkkikivi	24,6
kvartsi	20,5
kalkkikivi	18,5
hiekkakivi	14,4

kimmomoduulin arviointikaava, kun betonin yksiaksiaalinen puristuslujuus tunnetaan

$$E = E_0 \left( \frac{f_c}{f'_{c0}} \right)^{n_E}, \quad (3.2)$$

jossa kerroin  $E_0$  määräytyy runkoaineen perusteella taulukon 3.1 mukaisesti [7, Taulukko 4.1] ja eksponentille voidaan käyttää arvoa  $n_E = 1/3$ .

### 3.4 Poissonin luku

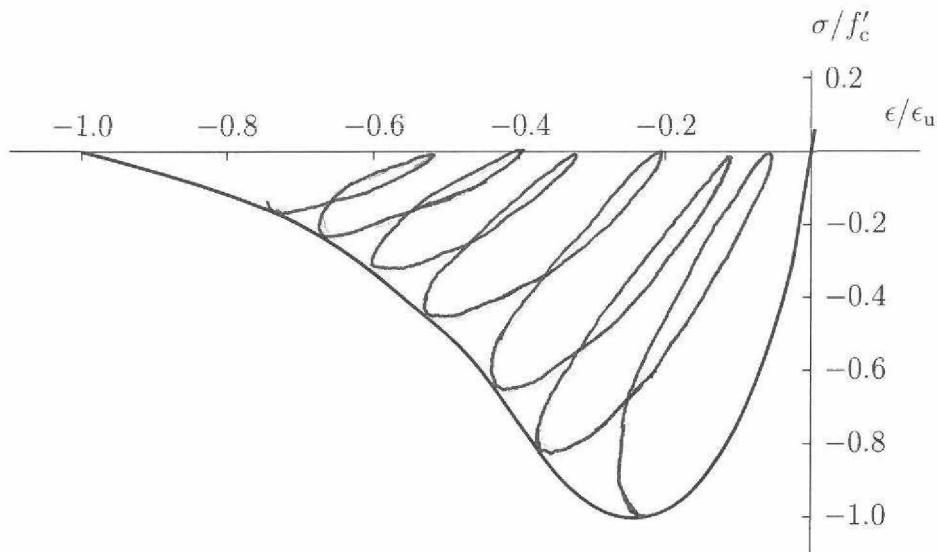
Betonin Poissonin vakio, eli suppeumaluku vaihtelee välillä 0,14–0,26 [5, 7]. Yksiakselisessa puristuksessa *näennäinen Poissonin luku* on vakio kunnes jännitystila on noin 80 % yksiakselisesta puristuslujuudesta, jonka jälkeen se alkaa kasvaa rakenteeseen syntyneiden halkeamien johdosta. Mikäli tarkempaa tietoa ei ole, voidaan suppeumaluvulle käyttää arvoa  $\nu = 0,2$ . Näennäisen Poissonin vakio riippuvuus yksiakselisesta puristusjännityksestä on esitetty kuvassa 3.3. Kolmiaksiaalikokeessa on saatu hieman pienempiä näennäisen Poissonin vakion arvoja [6].

### 3.5 Käyttäytyminen toistuvassa yksiakselisessa kuormituksessa

Mikäli jännitystasolla  $0,5f_c - 0,75f_c$  jännitys poistetaan, on jännitys-venymä kuvaajan palautumisosa epälineaarinen. Uudelleenkuormitettaessa jännitys-venymä kuvaajaan syntyy hystereesisilmukka. Jäykkyyden aleneminen on huomattavaa toistuvassa kuormituksessa, katso kuvaa 3.4.

### 3.6 Säröä ajava voima

Säröä ajava voima  $G_f$  määritellään energiana, joka tarvitaan olemassaolevan särön yksikön kokoisen pinta-alan kasvattamiseen. Sitä pidetään yleisesti materiaaliominaisuutena. Runkoaineen tyyppillä näyttää olevan suurempi vaikutus säröä ajavaan voimaan kuin



Kuva 3.4: Betonin tyypillinen jännitys-venymäkuvaaja yksiakselisessa toistuvassa kuormituksessa (Karsan ja Jirsa [9]).

runkoainepartikkelien koolla [7, Luku 3.3.2]. Lähteessä [7] on esitetty koetuloksiin sovitettu  $G_f$ :n lauseke puristuslujuuden funktiona

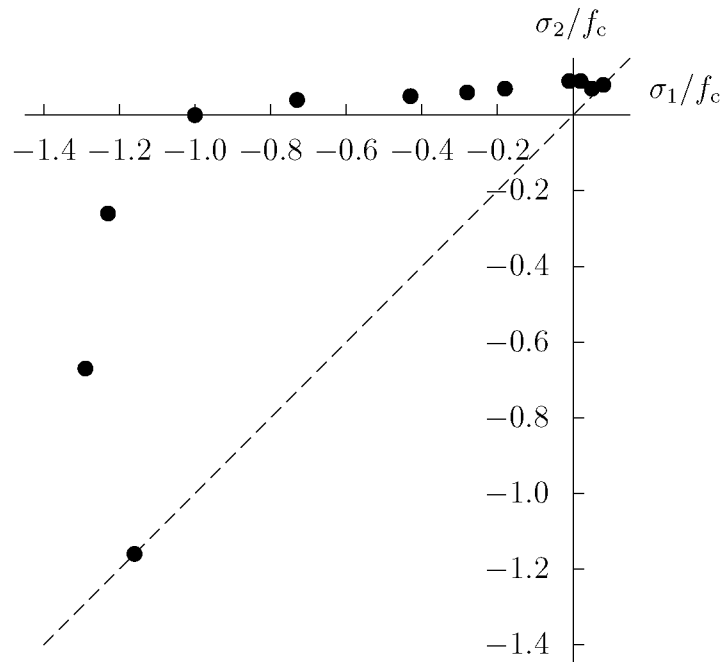
$$G_f = G_{f0} \left( \frac{f_c}{f_{c0}} \right)^{n_f}, \quad (3.3)$$

jossa  $G_{f0} = 110 \text{ N/m}$  ja  $f_{c0} = 10 \text{ MPa}$  ja  $n_f = 0, 18$ . Lauseke soveltuu betoneille, joiden yksiakselinen puristuslujuus on välillä 20–120 MPa, jolloin säröä ajavan voiman arvo vaihtelee välillä 120–180 N/m.

### 3.7 Karakteristinen pituus

Myös materiaalille ominaista pituusmittaa voidaan käyttää sen haurauden kuvaamiseen. Materiaalin karakteristinen pituus voidaan määritellä vetorasitetun kappaleen pituutena, johon varastoitunut elastinen energia juuri riittää muodostamaan yhden täydellisen murtopinnan [7]. Täten karakteristinen pituus voidaan ilmaista kaavana

$$l_{ch} = \frac{EG_f}{(f_t)^2}. \quad (3.4)$$



Kuva 3.5: Betonin kaksiakselisia koetuloksia, Kupfer et al. 1969 [11]. Betonin lujuus on ollut  $f_c = 59,4$  MPa.

Ottamalla huomioon regressiokaavat (3.1) ja (3.3) saadaan karakteristisen pituuden lausekkeeksi

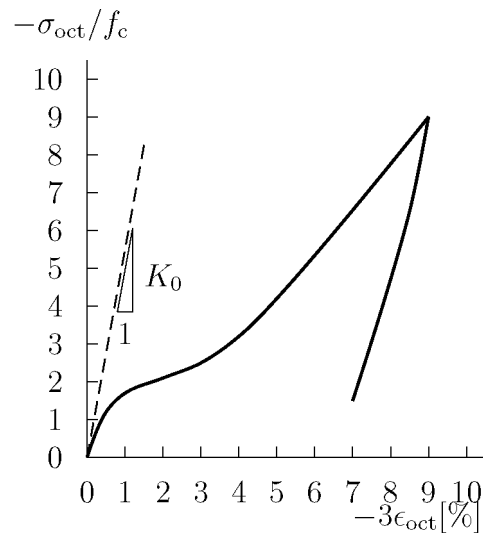
$$l_{ch} = \frac{E_0 G_{f0}}{(f'_{t0})^2} \left( \frac{f_c}{f'_{c0}} \right)^{n_E + n_f - 2n_t}. \quad (3.5)$$

### 3.8 Käyttäytyminen kaksiakselisessa jännitystilassa

Kaksiakselisessa puristuksessa betonin lujuus kasvaa, ja se on suurimmillaan 25 % luokkaa verrattuna yksiakseliseen puristuslujuuteen jännityssuhteen arvolla  $\sigma_2/\sigma_1 = 0,5$ . Kuvassa 3.5 on esitetty Kupferin ja hänen tutkijoidensa koetuloksia vuodelta 1969.

### 3.9 Käyttäytyminen hydrostaattisessa puristuksessa

Betonin käyttäytyminen hydrostaattisessa puristuksessa on myös hyvin epälineaarista. Kuvassa 3.6 on esitetty Greenin ja Swansonin 1973 [8] koetulos betonille jonka puristuslujuus on ollut  $f_c = 48,5$  MPa. Kuormitusta poistettaessa palautumiskäyrän tangentti on miltei vakio ja lähellä alkutilan kokoonpuristuvuusmoduulia  $K_0$ .



Kuva 3.6: Hydrostaattisen paineen ja tilavuudenmuutoksen riippuvuus (Green ja Swanson [8]).

## Luku 4

# Materiaalin vaurioehdot

### 4.1 Murto- ja myötöehtojen yleisiä ominaisuuksia

Murto- tai myötöehto on invariantti. Usein siltä edellytetään myös konveksisuutta. Alkuun isotrooppisen aineen myötö- tai murtoehto  $f = 0$  voi riippua vain kolmesta invariantista

$$f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = 0, \quad \text{tai} \quad f(I_1, J_2, \theta) = 0,$$

jossa jälkimmäinen muoto antaa ehdolle selkeän geometrisen tulkinnan niin meridiaaleikkauksille  $(I_1, J_2)$ -tasossa kuin myös deviatorisella tasolla.

Tässä raportissa kaikki murto- ja myötöehdot esitetään tehollisen jännityksen  $\sigma_e = \sqrt{3J_2}$ , keskimääräisen jännityksen  $\sigma_m = I_1/3$  ja deviatorisella tasolla määritellyn Loden kulman  $\theta$  avulla, katso kuva 2.2.

### 4.2 Deviatorinen taso

Materiaalin murto- tai myötöpinta muodostaa deviatorisessa tasossa suljetun käyrän, jolla on tiettyjä symmetriaominaisuuksia. Invariantista  $\cos 3\theta$  voidaan päätellä, että alkuun isotrooppisen aineen murtoehto on periodinen  $120^\circ$  välein. Voidaan myös päätellä, että murto- tai myötöpinta on täysin määrätty  $60^\circ$ :n sektorissa  $0^\circ \leq \theta \leq 60^\circ$ , joka toistuu deviatorisen tason muissa sektoreissa.

Mikäli materiaali käyttäytyy yhtenevästi sekä vedossa että puristuksessa, määräytyy myötöpinta  $30^\circ$  sektorissa  $0^\circ \leq \theta \leq 30^\circ$ . Tällöin puristus- ja vetomeridiaaneilla on sama etäisyys hydrostaattisesta akselista.

### 4.3 Meridiaaniviivat

Murto- tai myötöehdon meridiaaniviivoilla tarkoitetaan käyriä, joilla Loden kulma  $\theta$  on vakio. Meridiaaniviivat havainnollistavat hyvin murtopinnan muotoa  $(\xi, \rho)$ ,  $(I_1, \sqrt{J_2})$  tai  $(\sigma_m, \sigma_e)$  koordinaatistossa. Erityisesti seuraavat kolme meridiaaniviivat ovat havainnollisia.



**Vetomeridiaanilla** tarkoitetaan jännitystilaa jossa isotrooppiseen, hydrostaattiseen jännitystilaan superponoidaan  $\sigma_1$ :n suuntainen vetojännitys. Tällöin siis pätee

$$\sigma_1 > \sigma_2 = \sigma_3, \quad \text{jolloin} \quad \theta = 0^\circ. \quad (4.1)$$

Yksiakselinen vetävä jännitystila sijaitsee vetomeridiaanilla, kuten myös biakσιαallinen puristusjännitystila kun molemmat puristavat pääjännitykset ovat yhtäsuuria.

**Puristusmeridiaanilla** vastaavasti tarkoitetaan jännitystilaa jossa puristusjännitys lisätään isotrooppiseen jännitystilaan, joten

$$\sigma_1 = \sigma_2 > \sigma_3, \quad \text{jolloin} \quad \theta = 60^\circ. \quad (4.2)$$

Yksiakselinen puristusjännitystila sijaitsee puristusmeridiaanilla.

**Leikkausmeridiaani** saadaan kun hydrostaattiseen isotrooppiseen jännitystilaan lisätään  $\sigma_1$ -suuntaan positiivinen ja  $\sigma_3$  suuntaan negatiivinen itseisarvoltaan  $\tau$ :n suuruinen jännitys. Tällöin

$$\sigma_1 > \sigma_2 = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_3) > \sigma_3, \quad \text{jolloin} \quad \theta = 30^\circ. \quad (4.3)$$

Puhdas leikkausjännitystila sijaitsee leikkausmeridiaanilla.

## 4.4 Paineesta riippumattomat myötöehdot

Vaikka betonin murtumista ei voida kuvata murtoehdolla, joka ei riipu hydrostaattisesta paineesta, esitetään tässä kaksi tärkeintä, erityisesti metalleille hyvin soveltuvaa ehtoa.

### 4.4.1 Von Misesin myötöehto

Von Misesin myötöehto on yleisin metalleille käyetty ehto, ja se voidaan lausua muodossa

$$\sqrt{J_2} - k = 0, \quad (4.4)$$

jossa  $k$  on materiaalin myötöraja puhtaassa leikkauksessa. Usein se kirjoitetaan muodossa

$$\sqrt{3J_2} - \sigma_y = 0, \quad \text{eli} \quad \sigma_e - \sigma_y = 0, \quad (4.5)$$

jossa  $\sigma_y$  on materiaalin myötöraja yksiakselissa jännitystilassa ja  $\sigma_e$  on tehollinen jännitys. Täten von Misesin ehdon mukaan yksiakselisen vetolujuuden ja leikkauslujuuden välinen suhde on  $\sqrt{3} \approx 1,732$ .

Von Misesin myötöehdon kuvaaja pääjännitysavaruuksessa on ympyräsyylinteri, jonka akseli on hydrostaattinen akseli, ja sen leikkaus tasolla  $\sigma_3 = 0$  (tasojännitystila) on ellipsi

$$\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_2} - \sigma_y = 0. \quad (4.6)$$

Mikäli jännitystensorin ainoat nollasta eroavat komponentit ovat  $\sigma_x = \sigma$  ja  $\tau_{xy} = \tau$ , myötöehto saa muodon

$$\sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} - \sigma_y = 0. \quad (4.7)$$

#### 4.4.2 Trescan myötöehto

Trescan ehdon mukaan materiaali myötää kun maksimileikkausjännitys saavuttaa kriittisen arvon

$$\max(\frac{1}{2}|\sigma_1 - \sigma_2|, \frac{1}{2}|\sigma_2 - \sigma_3|, \frac{1}{2}|\sigma_3 - \sigma_1|) - k = 0, \quad (4.8)$$

jossa  $k$  on materiaalin myötöraja puhtaassa leikkauksessa. Trescan ehto voidaan ilmaista myös Haigh-Westergaard-koordinaattien avulla seuraavasti ( $0 \leq \theta \leq 60^\circ$ )

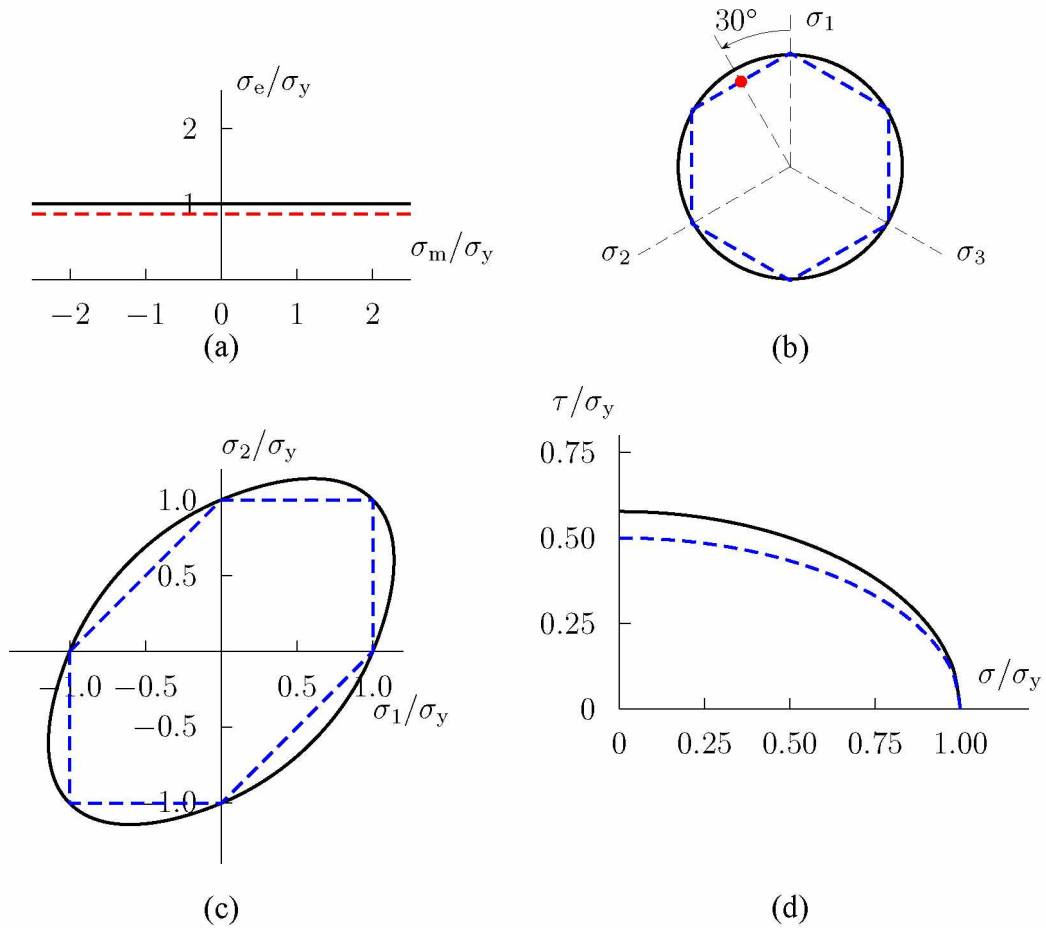
$$f(\rho, \theta) = \rho \sin(\theta + \frac{1}{3}\pi) - \sqrt{2}k = 0. \quad (4.9)$$

Trescan myötöehdon kuvaaja on sylinteri, jonka akseli yhtyy hydrostaattiseen akseliin. Sylinterin poikkileikkaus on säännöllinen kuusitahokas. Trescan kuusitahokas sijaitsee von Misesin sylinterin sisäpuolella mikäli yksiakselinen lujuus asetetaan yhtäsuureksi. Mikäli mallit asetetaan yhtymään leikkauslujuuden suhteen, leikkausmeridiaanit yhtyvät, sijaitsee von Misesin sylinteri Trescan kuusitahokkaan sisäpuolella.

Jännityskomponenteille  $\sigma, \tau$  myötöehto on muotoa

$$\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} - 2k = 0. \quad (4.10)$$

Von Misesin ja Trescan myötöehtoja on havainnollistettu kuvassa 4.1.



Kuva 4.1: Von Misesin (mustat käyrät) ja Trescan myötöehtoto (siniset katkoviivat): (a) meridiaanitasoilla (Trescan ehdon leikkausmeridiaani on piirretty punaisella katkoviivalla), (b)  $\pi$ -tasossa, (c) tasojännitystilassa, (d)  $(\sigma, \tau)$ -jännityksille. Materiaalin yksiakselinen lujuus on asetettu yhtäsuureksi, tällöin Von Misesin ja Trescan ehtojen veto- ja puristusmeridiaanit yhtyvät.

# Luku 5

## Betonille soveltuvia murtoehtoja

### 5.1 Betonin murtoehdon ominaispiirteitä

#### 5.1.1 Deviatorinen taso

Kokeelliset havaintojen perusteella betonin murtokäyrällä deviatorisessa tasossa on seuraavanlaiset ominaisuudet [5, 21].

1. Murtoehto muodostaa sileän konveksin käyrän (ainakin puristavassa jännitystilassa).
2. Murtokäyrällä on kolminkertainen symmetria pääjännitysakseleiden suhteen. Täten murtopinnan muoto deviatorisessa tasossa voidaan määrittää sektorissa  $0 \leq \theta \leq 60^\circ$ .
3. Murtokäyrä on miltei kolmiomainen pienillä hydrostaattisen paineen arvoilla ja pyöristyy puristavan hydrostaattisen jännityksen kasvaessa.

#### 5.1.2 Meridiaanileikkaukset

Meridiaanileikkaukset ovat hydrostaattisen akselin puristuspuolelle avautuvia avoimia käyriä, joita voidaan melko tarkasti approksimoida toisen asteen polynomilla. Kohtuullisilla hydrostaattisen paineen arvoilla lineaarinen paineriippuvuus antaa hyvän sovituksen koetuloksiin. Koetuloksiin soveltuu hyvin efektiivisen jännityksen  $\sigma_e$  suhteen neliöllinen lauseke.

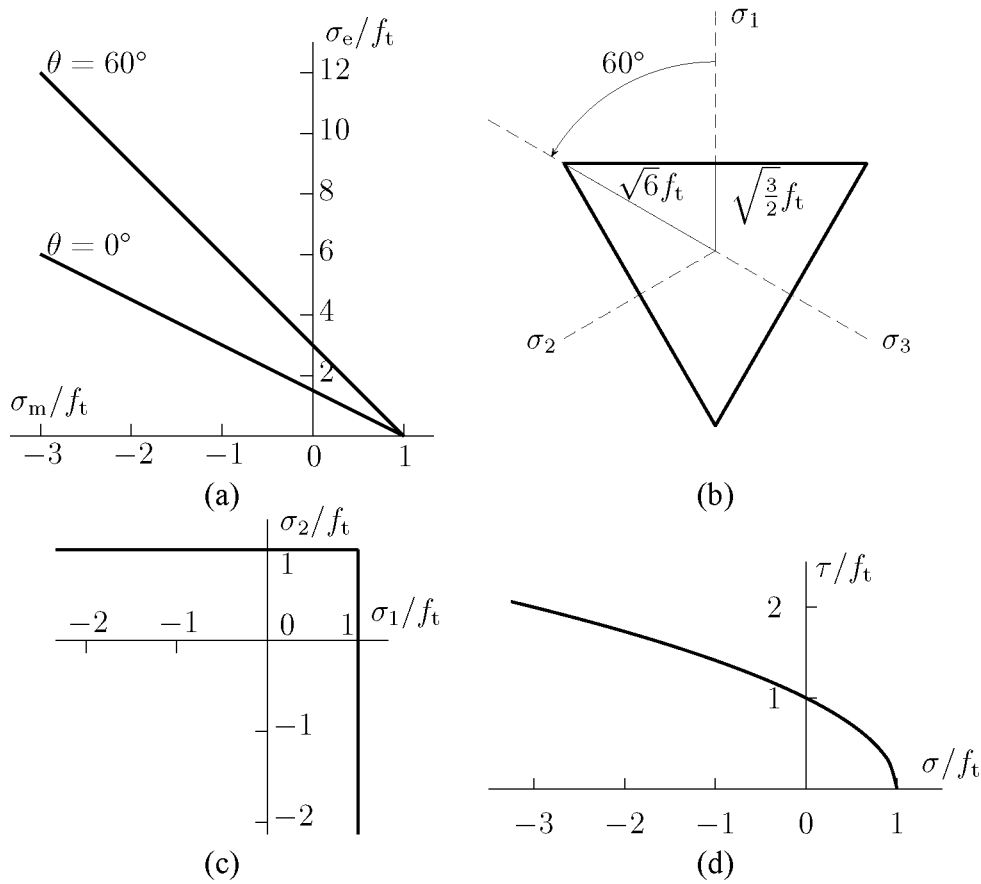
### 5.2 Rankinen maksimijännitysehto

Rankinen maksimijännitysmurtoehdon (vuodelta 1876) mukaan aine murtuu kun maksimipääjännitys saavuttaa kriittisen arvon, joka on yhtäsuuri materiaalin yksiaksaalisen vetävän murtojännityksen kanssa. Murtoehto voidaan siten lausua muodossa

$$\max(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = f_t. \quad (5.1)$$

Muuttujien  $\xi, \rho, \theta$  tai  $I_1, J_2, \theta$  avulla lausuttuna murtoehto on muotoa

$$f(\xi, \rho, \theta) = \sqrt{2}\rho \cos \theta + \xi - \sqrt{3}f_t = 0, \quad (5.2)$$



Kuva 5.1: Rankinen maksimijännitysmurtoehto: (a) puristus- ja vetomeridiaanileikkaukset, (b)  $\pi$ -taso, (c) tasojännitystilassa, (d)  $(\sigma, \tau)$ -jännityksille.

tai vastaavasti

$$f(I_1, J_2, \theta) = 2\sqrt{3J_2} \cos \theta + I_1 - 3f_t = 0, \quad \text{eli} \quad (5.3)$$

$$f(\sigma_m, \sigma_e, \theta) = 2\sigma_e \cos \theta + 3\sigma_m - 3f_t = 0. \quad (5.4)$$

Rankinen maksimijännitysmurtoehto on deviatorisessa tasossa kolmio ja meridiaanileikkaukset ovat suoria, katso kuvaa 5.1a ja b. Veto- ja puristusmeridiaanien suhde on  $\rho_t/\rho_c = 0,5$ .

Tasojännitystilassa Rankinen ehto on esitetty kuvassa 5.1c. Tasomuodonmuutostila ei muuta Rankinen murtopinnan muotoa  $(\sigma_1, \sigma_2)$ -tasossa mikäli Poissonin vakio on positiivinen, eli välillä  $0 \leq \nu \leq 0,5$  ( $\sigma_z = \nu(\sigma_1 + \sigma_2)$ ).

Mikäli ainoat nollasta eroavat jännityskomponentit ovat  $\sigma$  ja  $\tau$ , saadaan murtoehdon lausekkeeksi

$$\tau^2 = f_t(f_t - \sigma), \quad (5.5)$$

ja se on esitetty kuvassa 5.1d.

Yksinkertaisuus on Rankinen murtoehdon suuri etu, siinä on vain yksi määritettävä materiaaliparametri  $f_t$ . Mallin numeerisista implementointia hankaloittavat murtopinnan kulmat. Betoniin sovellettaessa sillä on seuraavia puutteita.

- Materiaali ei murru yksi- tai kaksiakselisessa puristuksessa.
- Meridiaanileikkaukset ovat suoria.

### 5.3 Maksimipäävenymämurtoehto

Maksimipäävenymämurtoehto, jota kutsutaan joissain lähteissä myös Saint-Venantin ehdoksi, on täysin analoginen Rankinen maksimipääjännitysehdon kanssa. Otaksutaan, että materiaali murtuu kun suurin päävenymä saavuttaa kriittisen arvon

$$\max(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) = \varepsilon_t. \quad (5.6)$$

Koska isotrooppisen aineen päävenymä- ja pääjännityssuunnat yhtyvät, materiaalivakio  $\varepsilon_t$  voidaan ilmaista yksiakselisen murtojännityksen  $f_t$  avulla, eli

$$f_t = E\varepsilon_t. \quad (5.7)$$

Meridianileikkaustasolla murtoehdon lausekkeeksi saadaan

$$2\sigma_e \cos \theta + 3 \frac{1-2\nu}{1+\nu} \sigma_m - \frac{3}{1+\nu} f_t = 0, \quad (5.8)$$

joka on varsin samankaltainen Rankinen maksimipääjännitysehdon (5.4) kanssa. Puhtaassa hydrostaattisessa vedossa malli ennustaa murtojännityksen arvoksi  $\sigma_{mt} = f_t/(1-2\nu)$ , joka Poissonin vakion arvolla  $\nu = 0,2$  antaa arvon  $1,667 f_t$ .

Tasojännitystilassa ( $\sigma_3 \equiv 0$ ) päävenymät voidaan lausua pääjännitysten avulla seuraavasti

$$\varepsilon_1 = (\sigma_1 - \nu\sigma_2)/E, \quad (5.9)$$

$$\varepsilon_2 = (\sigma_2 - \nu\sigma_1)/E, \quad (5.10)$$

$$\varepsilon_3 = -\nu(\sigma_1 + \sigma_2)/E, \quad (5.11)$$

jolloin murtopinta  $(\sigma_1, \sigma_2)$ -tasossa muodostuu suorista

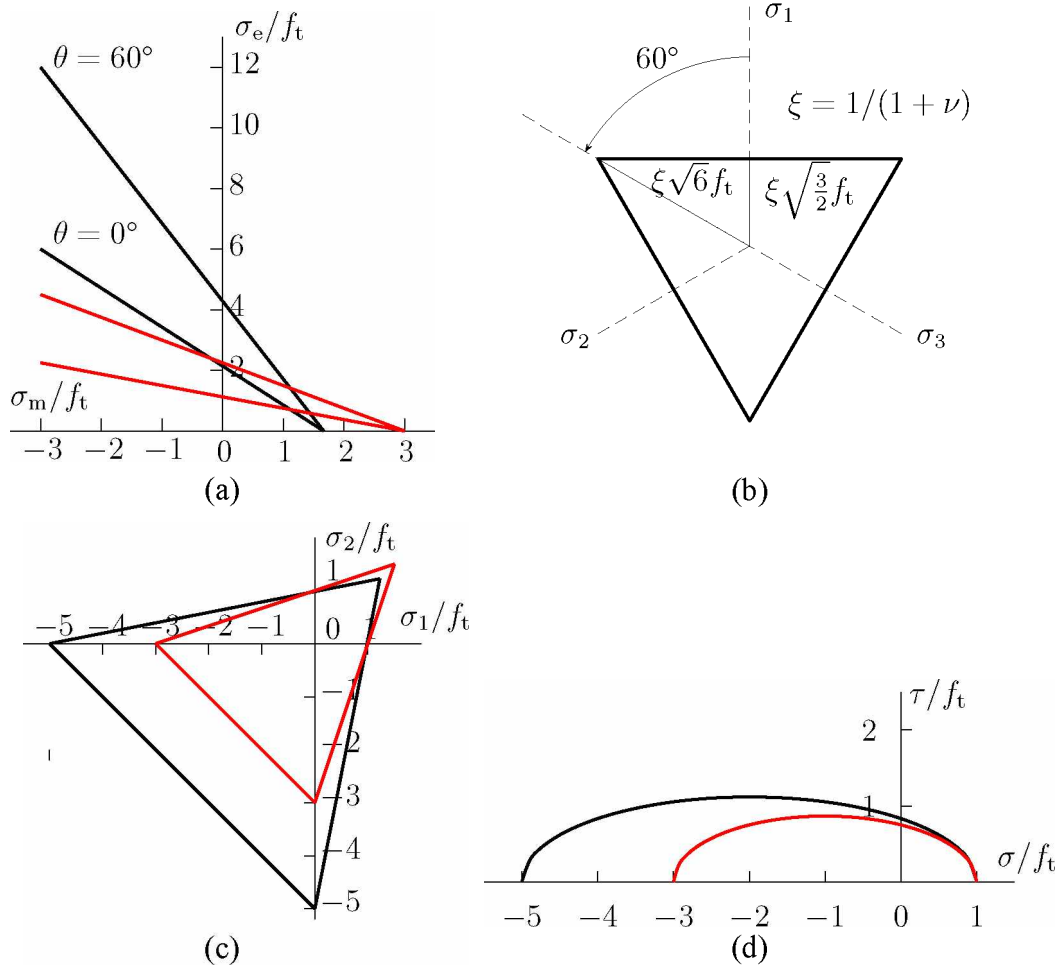
$$\sigma_1 - \nu\sigma_2 = f_t, \quad \varepsilon_1 \geq \varepsilon_2, \varepsilon_3, \quad (5.12)$$

$$\sigma_2 - \nu\sigma_1 = f_t, \quad \varepsilon_2 > \varepsilon_1, \varepsilon_3, \quad (5.13)$$

$$\sigma_1 + \sigma_2 = -f_t/\nu, \quad \varepsilon_3 > \varepsilon_1, \varepsilon_2. \quad (5.14)$$

Murtopinnan kuvaaja on esitetty kuvassa 5.2.

Samoin kuin Rankinen maksimipääjännitysmurtoehdossa, on Saint-Venantin maksimipäävenymäehdossakin vain yksi määritettävä materiaaliparametri  $f_t$ . Mallin numeerisista implementointia hankaloittavat murtopinnan kulmat. Betoniin sovellettaessa sen suurimpana puutteena on se, että tasojännitystilan murtopinta ei ole kokeellisten havaintojen mukainen kaksiakselisessa puristuksessa.



Kuva 5.2: Maksimipäävenymämurtoehto: (a) puristus- ja vetomeridiaanileikkaukset, (b)  $\pi$ -taso, (c) tasojännitystila, (d)  $(\sigma, \tau)$ -jännityksille. Kuvissa on Poissonin vakiolla arvo 0, 2 merkitty mustalla viivalla ja 1/3 punaisella.

## 5.4 Druckerin-Pragerin ehto

Druckerin ja Pragerin vuonna 1952 esittämä myötöehto on yksinkertaisin von Misesin myötöehdon yleistys paineriippuville materiaaleille. Sen projektio deviatoriselle tasolle on siten ympyrä, joten ehto ei riipu kulmasta  $\theta$ . Invarianttien  $I_1$  ja  $J_2$  avulla ilmaistuna se voidaan kirjoittaa muodossa

$$f(I_1, J_2) = \sqrt{3J_2} + \alpha I_1 - \beta = \sigma_e + 3\alpha\sigma_m - \beta = 0, \quad (5.15)$$

tai vaihtoehtoisesti suureiden  $I_1, \rho$  avulla seuraavasti

$$f(I_1, \rho) = \rho + \sqrt{2/3}\alpha I_1 - \sqrt{2/3}\beta = 0. \quad (5.16)$$

Myötöehto redusoituu von Misesin ehdoksi kun  $\alpha = 0$ . Druckerin-Pragerin myötöehto (DP) ilmaisee siten myödon lineaarisen riippuvuuden hydrostaattisesta paineesta ja sen kyky kuvata todellisten aineiden paineriippuvuutta on hyvin rajallinen. DP-ehdon projektiio meridiaanitasoille on siten suora viiva, kuva 5.3

DP-ehdossa on kaksi materiaaliparametria  $\alpha$  ja  $\beta$ , ne voidaan määrittää esimerkiksi käyttämällä kahta seuraavista neljästä materiaalikoikeesta: (i) yksiakselinen puristus ( $f_c$ ), (ii) yksiakselinen veto ( $f_t$ ), (i) kaksiakselinen puristus ( $f_{bc}$ ), tai (iv) kaksiakselinen veto ( $f_{bt}$ ). Nämä materiaalilujuuksien arvot voidaan lausua materiaaliparametrien  $\alpha$  ja  $\beta$  avulla seuraavasti

$$f_c = \frac{\beta}{1 - \alpha}, \quad f_t = \frac{\beta}{1 + \alpha}, \quad (5.17)$$

$$f_{bc} = \frac{\beta}{1 - 2\alpha}, \quad f_{bt} = \frac{\beta}{1 + 2\alpha}. \quad (5.18)$$

Mikäli yksi- ja kaksiakselinen puristuslujuus tunnetaan, vakioille  $\alpha$  ja  $\beta$  saadaan lausekkeet

$$\alpha = \frac{f_{bc} - f_c}{2f_{bc} - f_c} = \frac{(f_{bc}/f_c) - 1}{2(f_{bc}/f_c) - 1}, \quad \beta = (1 - \alpha)f_c. \quad (5.19)$$

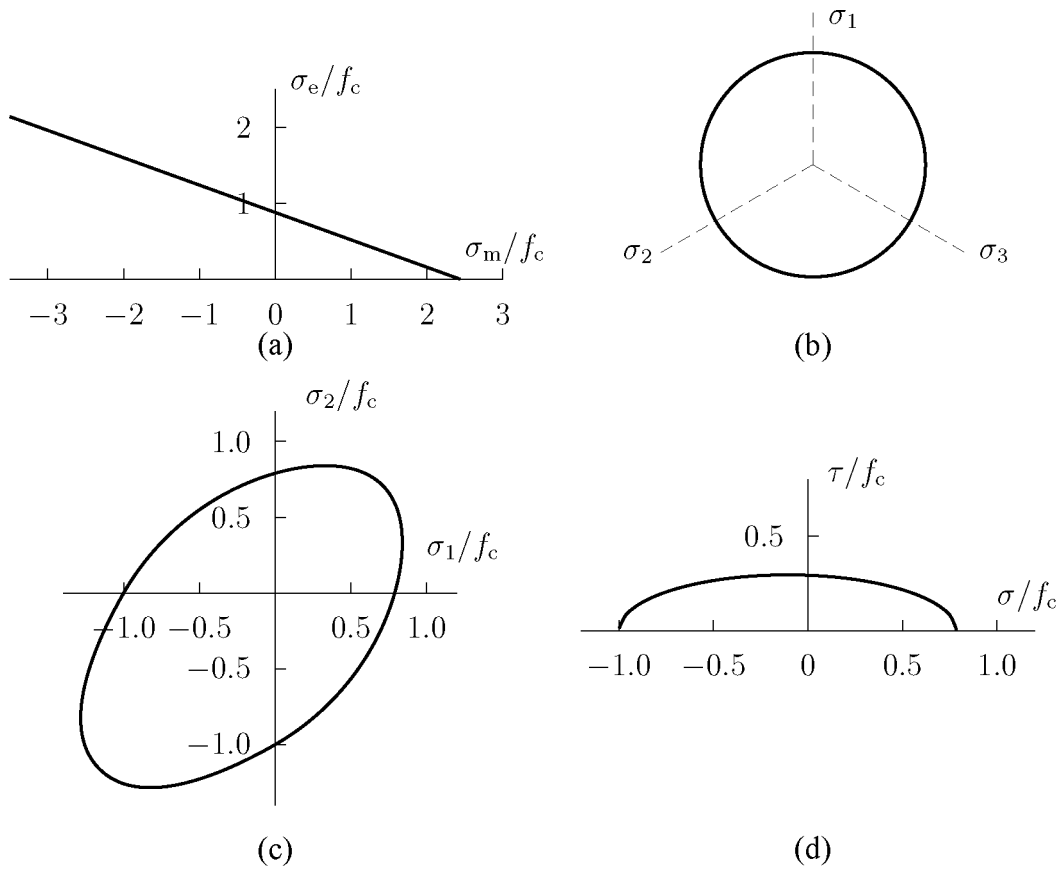
Yllä olevasta  $\alpha$ :n lausekkeesta havaitaan, että on oltava  $f_{bc} > f_c$ , jotta malli olisi mielekäs betonin murtoehdoksi. Vastaavasti jos yksiakseliset lujuudet tunnetaan, saadaan DP-ehdon vakioille lausekkeet

$$\alpha = \frac{f_c - f_t}{f_c + f_t}, \quad \beta = (1 - \alpha)f_c. \quad (5.20)$$

Mikäli puristus- ja vetolujuuden suhdetta merkitään symbolilla  $m$ ,  $f_c = mf_t$ , saadaan

$$\alpha = \frac{m - 1}{m + 1}, \quad \beta = \frac{2}{m + 1}f_c. \quad (5.21)$$





Kuva 5.3: Druckerin-Pragerin murtoehto: (a) meridiaanitasoilla, (b)  $\pi$ -tasossa, (c) ta-sojännitystilassa, (d)  $(\sigma, \tau)$ -jännityksille. Kuvissa  $f_{bc} = 1, 16f_c$ , josta seuraa  $\alpha = 0, 12$  ja  $\beta = 0, 88f_c$ .

Tasojännitystilassa ( $\sigma_3 \equiv 0$ ) DP-ehto voidaan kirjoittaa muodossa

$$\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_2} + \alpha(\sigma_1 + \sigma_2) - \beta = 0, \quad (5.22)$$

joka esittää pääjännitystasossa ( $\sigma_1, \sigma_2$ ) olevaa ellipsiä, jonka pääakseli on  $45^\circ$ -kulmassa  $\sigma_1$ -akseliin nähden, kuva 5.3c.

Mikäli jännitystensorin ainoat komponentit ovat  $\sigma$  ja  $\tau$ , saadaan DP-ehdoksi yksiakselisten materiaalivakioiden avulla lausuttuna

$$\sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} + \frac{m-1}{m+1}\sigma - \frac{2}{m+1}f_c = 0, \quad (5.23)$$

joka on esitetty kuvassa 5.3d.

Druckerin-Pragerin murtoehto soveltuu varsin huonosti betonin kuvaamiseen. Jotta kaksiakselisella puristuslujuudella olisi äärellinen arvo, on oltava  $1 - 2\alpha > 0$ , josta seuraa ehto  $m < 3$ , eli  $f_c < 3f_t$ . Tämä on betonille varsin epärealistinen ehto.

Kaksi- ja yksiakselisen puristuslujuuksien suhde on betonilla yleensä välillä 1,1–1,3. Usein käytetään Kupferin kokeista saamaa arvoa 1,16 ja se antaa  $\alpha$  parametrille arvon 0,12. Tämä johtaa vetolujuuden arvoon  $f_t = 0,79f_c$ , eli  $m = 1,3$ , mikä on betonille aivan liian suuri.

Todettakoon yhteenvetona, että DP-ehto ei sovellu betonin murtopinnan kuvaamiseen johtuen seuraavista seikoista.

- Murtopinta ei riipu kolmannelle invariantille  $\cos 3\theta$ .
- Meridiaaniviivat ovat suoria.
- Kaksiakselisen puristuslujuuden olemassaolo rajoittaa epärealistisella tavalla yksiakselisten puristus- ja vetolujuuksien suhdetta:  $f_c < 3f_t$ .

## 5.5 Mohrin-Coulombin ehto

Druckerin-Pragerin murtoehto on von Misesin ehdon yleistys paineriippuvalle materiaalille. Mohrin-Coulombin murtoehtoa voidaan vastaavasti pitää vastaavana Trescan ehdon yleistyksenä.

Coulombin ehto vuodelta 1773 on vanhin tunnettu murtoehto. Se olettaa lineaarisen riippuvuuden äärimmäisten pääjännitysten välillä ( $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ )

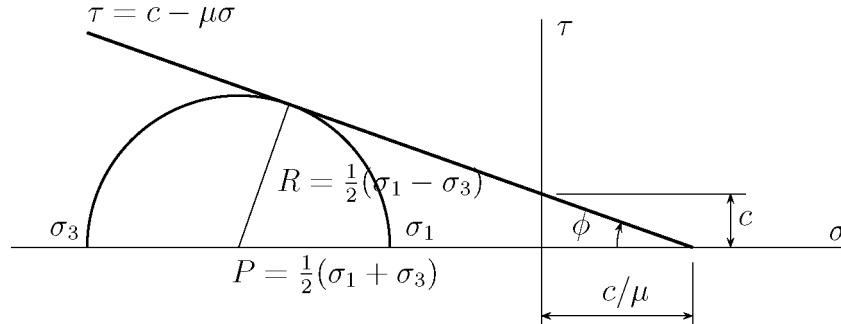
$$m\sigma_1 - \sigma_3 - f_c = 0, \quad (5.24)$$

jossa  $m = f_c/f_t$ . Mohrin ympyröiden avulla se voidaan lausua muodossa

$$|\tau| + \mu\sigma - c = 0, \quad (5.25)$$

jossa kaksi positiivista materiaalivakiota:  $\mu$  ja  $c$ . Kuvan 5.4 perusteella havaitaan

$$\mu = \tan \phi, \quad (5.26)$$



Kuva 5.4: Mohrin ympyrät ja Coulombin murtoehto.

jossa kulmasta  $\phi$  käytetään nimitystä kitkakulma. Kitkattomille materiaaleille ( $\phi = 0$ ) Mohrin-Coulombin ehto (5.25) redusoituu Trescan maksimileikkausjännitysehdoksi, jolloin koheesioparametri  $c$  on yhtäsuuri materiaalin leikkauslujuuden  $k$  kanssa.

Hydrostaattisen paineen alaisena  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \sigma$  yhtälön (5.24) avulla saadaan lauseke

$$\sigma = \frac{f_c}{m-1} = \frac{c}{\mu}. \quad (5.27)$$

Yksiakselisten lujuuksien ja kitkakulman välille voidaan johtaa yhteys

$$m = \frac{f_c}{f_t} = \frac{1 + \sin \phi}{1 - \sin \phi}. \quad (5.28)$$

Hyödyllisiä ovat myös relaatiot

$$\mu = \tan \phi = \frac{m-1}{2\sqrt{m}}, \quad (5.29)$$

ja

$$c = \frac{f_c}{2\sqrt{m}}. \quad (5.30)$$

Määritetään seuraavaksi suorien meridiaaniviivojen yhtälöt. Invarianttien  $I_1$  ja  $\rho$  lausekkeet puristusmeridiaanilla ( $\sigma_1 = \sigma_2 > \sigma_3, \theta = 60^\circ$ ) ovat

$$I_{1c} = 2\sigma_1 + \sigma_3, \quad \rho_c = \sqrt{2J_{2c}} = \sqrt{\frac{2}{3}}(\sigma_1 - \sigma_3). \quad (5.31)$$

Lausumalla jännitykset  $\sigma_1$  ja  $\sigma_3$  invarianttien  $I_{1c}$  ja  $\rho_c$  avulla ja sijoittamalla ne murtoeh-

toon (5.24) saadaan puristusmeridiaanin yhtälöksi

$$\rho_c + \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{m-1}{m+2} I_{1c} - \frac{\sqrt{6}}{m+2} f_c = 0, \quad \text{tai} \quad (5.32)$$

$$\sigma_e + 3 \frac{m-1}{m+2} \sigma_m - \frac{3}{m+2} f_c = 0. \quad (5.33)$$

Vetomeridiaanilla ( $\sigma_1 > \sigma_2 = \sigma_3, \theta = 0^\circ$ ) invarianttien lausekkeet ovat

$$I_{1t} = \sigma_1 + 2\sigma_3, \quad \rho_t = \sqrt{2J_{2t}} = \sqrt{\frac{2}{3}}(\sigma_1 - \sigma_3), \quad (5.34)$$

ja vetomeridiaanin yhtälöksi saadaan

$$\rho_t + \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{m-1}{2m+1} I_{1t} - \frac{\sqrt{6}}{2m+1} f_c = 0, \quad \text{eli} \quad (5.35)$$

$$\sigma_e + 3 \frac{m-1}{2m+1} \sigma_m - \frac{3}{2m+1} f_c = 0. \quad (5.36)$$

Eliminoimalla invariantti  $I_1 = I_{1t} = I_{1c}$ , saadaan puristus- ja vetomeridiaanien säteiden suhteeksi lauseke

$$\frac{\rho_c}{\rho_t} = \frac{2m+1}{m+2} = \frac{3 + \sin \phi}{3 - \sin \phi}. \quad (5.37)$$

Murtopinnan muoto deviatorisella tasolla riippuu siten yksiakselisten puristus- ja veto-  
murtolujuuksien suhteesta  $m$ .

Tasomuodonmuutostilassa Mohrin-Coulombin murtopinta on rajoittamaton kaksiakselisessä puristuksessa jos

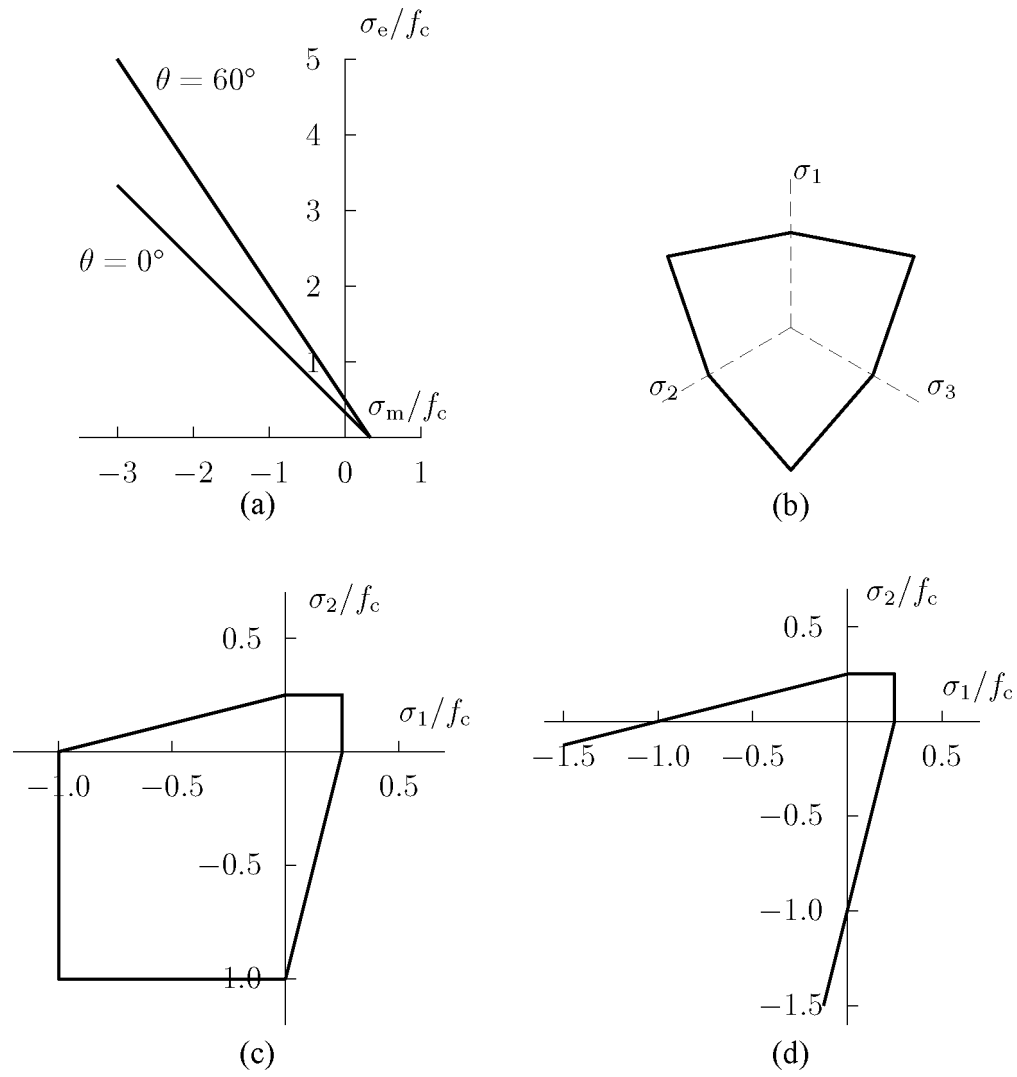
$$m < \frac{1}{2\nu}. \quad (5.38)$$

Mikäli oletetaan betonin Poissonin luvuksi 0,2 epäyhtälöstä seuraa ehto  $m < 2,5$ , mikä on epärealistinen betonin puristus- ja vetolujuuksien suhdealue. Epäyhtälö (5.38) voidaan todeta helposti murtoehdosta (5.24) tarkastelemalla jännitystilaa  $\sigma_x = \sigma_y = \sigma < 0$  ja  $\sigma_z = 2\nu\sigma < 0 > \sigma$ , tällöin  $\sigma_1 = 2\nu\sigma$  ja  $\sigma_2 = \sigma_3 = \sigma$ , jolloin murtoehto ei toteudu millään puristavan jännityksen  $\sigma$  arvolla.

Mikäli Mohrin-Coulombin murtoehto sovitetaan yksiakselisen puristuslujuuden ja kitkakulman avulla, saadaan yksiakseliselle vetolujuudelle liian suuri arvo. Yhdistämällä Mohrin-Coulombin murtoehtoon Rankinen-vetomurtoehto saadaan kolmiparametrinen murtoehto, joka varsin hyvin soveltuu betonin lujuuskäyttäytymisen kuvaamiseen. Modifioitu murtoehto on esitetty kuvassa 5.6.

Materiaaliparametrien sovitusta silmälläpitäen kirjoitetaan meridiaaniviivojen lausekkeet kitkakulman  $\phi$  ja yksiakselisen puristuslujuuden  $f_c$  avulla. Yhtälöstä (5.33) saadaan puristusmeridiaanin lausekkeeksi

$$\sigma_e + \frac{2 \sin \phi}{1 - \frac{1}{3} \sin \phi} \sigma_m - \frac{1 - \sin \phi}{1 - \frac{1}{3} \sin \phi} f_c = 0, \quad (5.39)$$



Kuva 5.5: Mohrin-Coulombin murtoehto kun  $m = 4$ : (a) meridiaanileikkaukset, (b)  $\pi$ -taso, (c) tasojännitystilassa ja (d) tasomuodonmuutostilassa.

josta saadaan kitkakulmalle yhtälö

$$\sin \phi = \frac{\bar{\sigma}_e - 1}{\frac{1}{3}\bar{\sigma}_e - 2\bar{\sigma}_m - 1} \quad (5.40)$$

jossa jännitykset  $\bar{\sigma}_m$  ja  $\bar{\sigma}_e$  ovat puristuslujuuteen  $f_c$  suhteutettuja dimensiottomia jännityksiä

$$\bar{\sigma}_m = \frac{\sigma_m}{f_c}, \quad \bar{\sigma}_e = \frac{\sigma_e}{f_c}. \quad (5.41)$$

Mikäli mallin parametrit määritetään käyttäen Kupferin kokeista saatua puristusmeridiaanin pistettä  $(\xi, \rho) =$

$(-5f_c, 4f_c)$ , eli  $(\bar{\sigma}_m, \bar{\sigma}_e) = (2, 887; 4, 899)$ , tuottaa se arvon  $\sin \phi \approx 0,6$ , eli materiaalin sisäinen kitkakulma on  $\phi \approx 37^\circ$ .

## 5.6 Willamin-Warnken mallit

Willam ja Warnke esittivät vuonna 1974 kolmi- ja viisiparametriset murtoehdot. Kolmi-parametrinen mallin meridiaaniviivat ovat suoria, joten se sopii parhaiten sovellettavaksi pienillä hydrostaattisen paineen arvoilla. Myötöehdon muoto deviatorisella tasolla sektorissa  $0 \leq \theta \leq 60^\circ$  on ellipsi, ja dimensiottoman säteen  $\bar{\rho} = \rho/f_c$  lausekkeeksi saadaan [25],[5, Luku 5.6.2]

$$\bar{\rho}(\theta) = \frac{2\bar{\rho}_c(\bar{\rho}_c^2 - \bar{\rho}_t^2) \cos \theta + \bar{\rho}_c(2\bar{\rho}_t - \bar{\rho}_c) \sqrt{4(\bar{\rho}_c^2 - \bar{\rho}_t^2) \cos^2 \theta + 5\bar{\rho}_t^2 - 4\bar{\rho}_c\bar{\rho}_t}}{4(\bar{\rho}_c^2 - \bar{\rho}_t^2) \cos^2 \theta + (\bar{\rho}_c - 2\bar{\rho}_t)^2}. \quad (5.42)$$

Murtopinta lausutaan keskimääräisten jännitysten

$$\sigma_m = \sigma_{\text{oct}} = \frac{1}{3}I_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\xi, \quad \tau_m^2 = \frac{2}{5}\tau_{\text{oct}}^2 = \frac{3}{5}J_2 = \frac{1}{5}\rho^2, \quad (5.43)$$

avulla seuraavasti

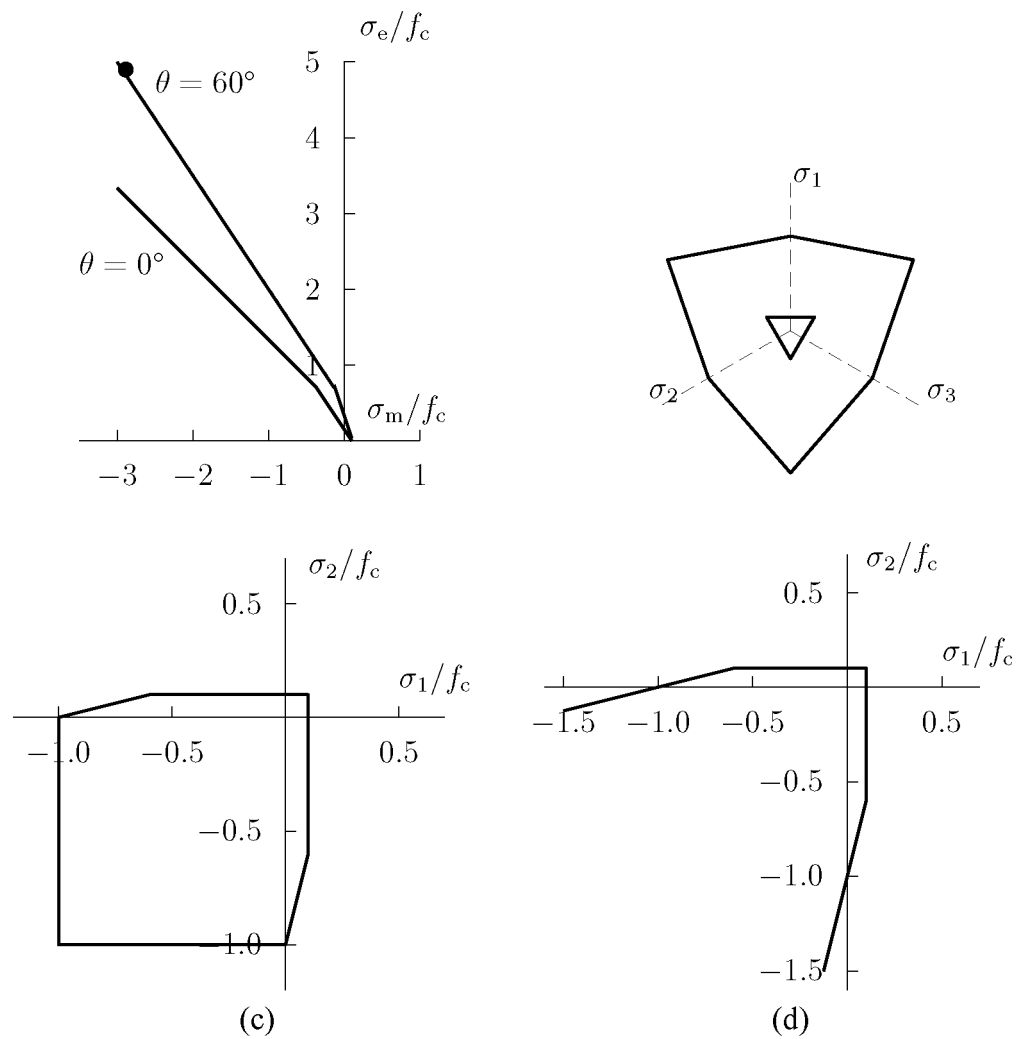
$$f(\sigma_m, \tau_m, \theta) = \tau_m + \frac{\bar{\rho}(\theta)}{z}\sigma_m - \bar{\rho}(\theta)f_c = 0. \quad (5.44)$$

Mallissa on kolme parametria  $\bar{\rho}_c, \bar{\rho}_t$  ja  $z$ , jotka voidaan määrittää kolmesta kokeesta: (i) yksiakselinen veto  $\sigma_1 = f_t$ , (ii) yksiakselinen puristus  $\sigma_3 = -f_c$  ja (iii) kaksiakselinen puristus  $\sigma_2 = \sigma_3 = -f_{bc}$ . Ratkaisuksi saadaan lausekkeet

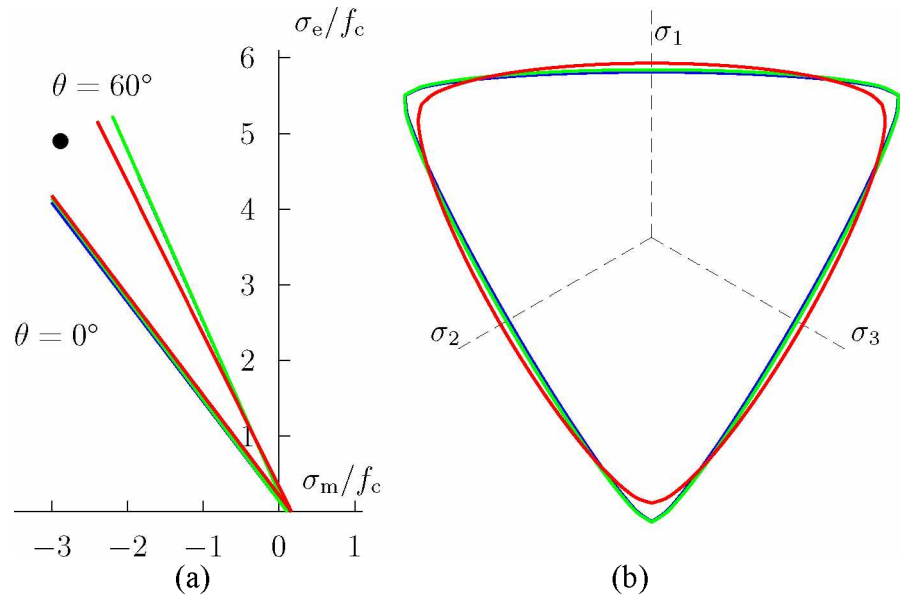
$$z = \frac{\bar{f}_{bc}\bar{f}_t}{\bar{f}_{bc} - \bar{f}_t}, \quad (5.45)$$

$$\bar{\rho}_t = \sqrt{\frac{6}{5}} \frac{\bar{f}_{bc}\bar{f}_t}{2\bar{f}_{bc} + \bar{f}_t}, \quad (5.46)$$

$$\bar{\rho}_c = \sqrt{\frac{6}{5}} \frac{\bar{f}_{bc}\bar{f}_t}{3\bar{f}_{bc}\bar{f}_t + \bar{f}_{bc} - \bar{f}_t}, \quad (5.47)$$



Kuva 5.6: Modifioitu Mohrin-Coulombin murtoehto kun  $m = 10$  ja  $\phi = 37^\circ$ : (a) meridi-aanileikkaukset, (b)  $\pi$ -taso ja deviatorinen taso jolla  $\sigma_m = -f_c$ , (c) tasojännitystilassa ja (d) tasomuodonmuutostilassa.



Kuva 5.7: Willamin-Warnken kolmiparametrinen murtopinta: (a) meridiaanileikkaukset, (b) deviatorinen leikkaus arvolla  $\sigma_m = -f_c$  ( $\tau_m = \sqrt{2/15}\sigma_e$ ). Sininen viiva  $\bar{f}_{bc} = 1, 16$ ;  $\bar{f}_t = 0, 1$ ; vihreä viiva  $\bar{f}_{bc} = 1, 3$ ,  $\bar{f}_t = 0, 1$ ; punainen viiva  $\bar{f}_{bc} = 1, 8$ ;  $\bar{f}_t = 0, 15$ .

jossa on käytetty yksiakseliseen puristuslujuuteen suhteutettuja dimensiottomia lukuja

$$\bar{f}_t = \frac{f_t}{f_c}, \quad \bar{f}_{bc} = \frac{f_{bc}}{f_c}. \quad (5.48)$$

Murtopinnan meridiaaniviivat ovat suoria ja murtokartion huippu paineakselilla sijaitsee pisteessä  $\sigma_m = z f_c$ , eli  $\xi = \sqrt{3}z f_c$  tai  $I_1 = 3z f_c$ .

Willamin-Warnken kolmiparametrinen malli on esitetty kuvassa 5.7 kolmena eri parametrivariaationa. Sinisellä viivalla on esitetty tapaus:  $\bar{f}_t = 0, 1$ ;  $\bar{f}_{bc} = 1, 16$  ( $z = 0, 1094$ ,  $\bar{\rho}_t = 0, 05251$ ;  $\bar{\rho}_c = 0, 09025$ ); vihreällä viivalla tapaus:  $\bar{f}_t = 0, 1$ ;  $\bar{f}_{bc} = 1, 3$  ( $z = 0, 1083$ ,  $\bar{\rho}_t = 0, 05274$ ,  $\bar{\rho}_c = 0, 08956$ ). Willam ja Warnke [25] saivat meridiaaniviivat lähelle Laynayn ja Gachonin [12] koetuloksia käyttämällä lujuusarvoja  $\bar{f}_t = 0, 15$  ja  $\bar{f}_{bc} = 1, 8$ , jotka ovat kuitenkin epärealistisen suuria ( $z = 0, 1636$ ;  $\bar{\rho}_t = 0, 07887$ ;  $\bar{\rho}_c = 0, 12023$ ). Tämä tapaus on piirretty kuvaan 5.7 punaisella viivalla.

Willam ja Warnke esittivät artikkelissaan myös viisiparametrisen mallin betonin murtopinnaksi. Siinä paraboliset meridiaanileikkaukset saadaan aikaan määrittelemällä erik-



Taulukko 5.1: Willamin-Warnken viisiparametrin mallin parametrien määrittäminen ( $\bar{\sigma}_i = \sigma_{mi}/f_c$ ,  $\bar{\tau}_i = \tau_{mi}/f_c$ ).

testi	$\sigma_m/f_c$	$\tau_m/f_c$	$\theta$	$\rho(\sigma_m, \theta)$
1: $\sigma_1 = f_t$	$\frac{1}{3} \bar{f}_t$	$\sqrt{\frac{2}{15}} \bar{f}_t$	$0^\circ$	$\rho_t = \sqrt{\frac{2}{3}} f_t$
2: $\sigma_2 = \sigma_3 = -f_{bc}$	$-\frac{2}{3} \bar{f}_{bc}$	$\sqrt{\frac{2}{15}} \bar{f}_{bc}$	$0^\circ$	$\rho_t = \sqrt{\frac{2}{3}} f_{bc}$
3: murtopiste vetomeridiaanilta	$\bar{\sigma}_1 < 0$	$\bar{\tau}_1$	$0^\circ$	$\rho_t = \sqrt{5} \bar{\tau}_1 f_c$
4: $\sigma_3 = -f_c$	$-\frac{1}{3}$	$\sqrt{\frac{2}{15}}$	$60^\circ$	$\rho_c = \sqrt{\frac{2}{3}} f_c$
5: murtopiste puristusmeridiaanilta	$\bar{\sigma}_2 < 0$	$\bar{\tau}_2$	$60^\circ$	$\rho_c = \sqrt{5} \bar{\tau}_2 f_c$
rajoite-ehto	$\bar{\sigma}_0 > 0$	0	$0^\circ, 60^\circ$	0

seen veto- ja puristusmeridiaanien lausekkeet seuraavasti

$$\frac{\tau_{mt}}{f_c} = \frac{\bar{\rho}_t}{\sqrt{5} f_c} = a_0 + a_1 \frac{\sigma_m}{f_c} + a_2 \left( \frac{\sigma_m}{f_c} \right)^2, \quad (5.49)$$

$$\frac{\tau_{mc}}{f_c} = \frac{\bar{\rho}_c}{\sqrt{5} f_c} = b_0 + b_1 \frac{\sigma_m}{f_c} + b_2 \left( \frac{\sigma_m}{f_c} \right)^2. \quad (5.50)$$

Vaativalla meridiaaniviivojen leikkaavan paineakselin samassa pisteessä jää jäljelle viisi materiaaliparametria, jotka voidaan määrittää kolmesta kokeesta: (i) yksiakselinen veto  $\sigma_1 = f_t$ , (ii) yksiakselinen puristus  $\sigma_3 = -f_c$  ja (iii) kaksiakselinen puristus  $\sigma_2 = \sigma_3 = -f_{bc}$ . Lujuusarvojen lisäksi tarvitaan piste sekä veto- että puristusmeridiaanilta suuren hydrostaattisen paineen alaisena. Yhteenvetona materiaaliparametrien määrittäykseksi ja rajoite-ehto on esitetty taulukossa 5.1 [25, Appendix II], [5, Taulukko 5.3].

Sijoittamalla taulukon 5.1 kolmen ensimmäisen kokeen arvot vetomeridiaanin lausekkeeseen (5.49) saadaan kolmen yhtälön systeemi

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{3} \bar{f}_t & \frac{1}{3} (\bar{f}_t)^2 \\ 1 & -\frac{2}{3} \bar{f}_{bc} & \frac{4}{9} (\bar{f}_{bc})^2 \\ 1 & \bar{\sigma}_1 & \bar{\sigma}_1^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sqrt{\frac{2}{15}} \bar{f}_t \\ \sqrt{\frac{2}{15}} \bar{f}_{bc} \\ \bar{\tau}_1 \end{Bmatrix}. \quad (5.51)$$

Ratkaisu vetomeridiaanin määrittäville parametreille on

$$a_2 = \frac{\sqrt{\frac{6}{5}} [\bar{\sigma}_1(\bar{f}_{bc} - \bar{f}_t) - \bar{f}_t \bar{f}_{bc} + \bar{\tau}_1(2\bar{f}_{bc} + \bar{f}_t)]}{(2\bar{f}_{bc} + \bar{f}_t)(\bar{\sigma}_1^2 + \frac{2}{3}\bar{f}_{bc}\bar{\sigma}_1 - \frac{1}{3}\bar{f}_t\bar{\sigma}_1 + \frac{2}{9}\bar{f}_t\bar{f}_{bc})}, \quad (5.52)$$

$$a_1 = \frac{1}{3}(2\bar{f}_{bc} - \bar{f}_t)a_2 + \sqrt{\frac{6}{5}} \frac{\bar{f}_t - \bar{f}_{bc}}{2\bar{f}_{bc} + \bar{f}_t}, \quad (5.53)$$

$$a_0 = \sqrt{\frac{2}{15}}\bar{f}_{bc} + \frac{2}{3}\bar{f}_{bc}a_1 - \frac{4}{9}(\bar{f}_{bc})^2a_2. \quad (5.54)$$

Veto- ja puristusmeridiaanien hydrostaattisen akselin yhteisen leikkauspisteen ehdosta saadaan yhtälöt

$$a_0 + \bar{\sigma}_0 a_1 + \bar{\sigma}_0^2 a_2 = 0, \quad (5.55)$$

$$b_0 + \bar{\sigma}_0 b_1 + \bar{\sigma}_0^2 b_2 = 0. \quad (5.56)$$

Hydrostaattisen akselin leikkauspisteen koordinaatti  $\bar{\sigma}_0$  voidaan ratkaista yhtälöstä (5.55)

$$\bar{\sigma}_0 = \frac{-a_1 - \sqrt{a_1^2 - 4a_0a_2}}{2a_2}. \quad (5.57)$$

ja sijoittamalla se yhtälöön (5.56), voidaan esimerkiksi  $b_0$  ratkaista parametrien  $b_1$  ja  $b_2$  avulla. Nämä kaksi jäljellejäänyttä tuntematonta saadaan testien 4 ja 5 avulla. Ratkaisu puristusmeridiaanin määrittäville parametreille on siten

$$b_2 = \frac{\bar{\tau}_2(\bar{\sigma}_0 + \frac{1}{3}) - \sqrt{\frac{2}{15}}(\bar{\sigma}_0 - \bar{\sigma}_2)}{(\bar{\sigma}_2 - \bar{\sigma}_0)(\bar{\sigma}_2 + \frac{1}{3})(\bar{\sigma}_0 + \frac{1}{3})}, \quad (5.58)$$

$$b_1 = (\frac{1}{3} - \bar{\sigma}_2)b_2 - \frac{\sqrt{\frac{6}{5}} - 3\bar{\tau}_2}{3\bar{\sigma}_2 + 1}, \quad (5.59)$$

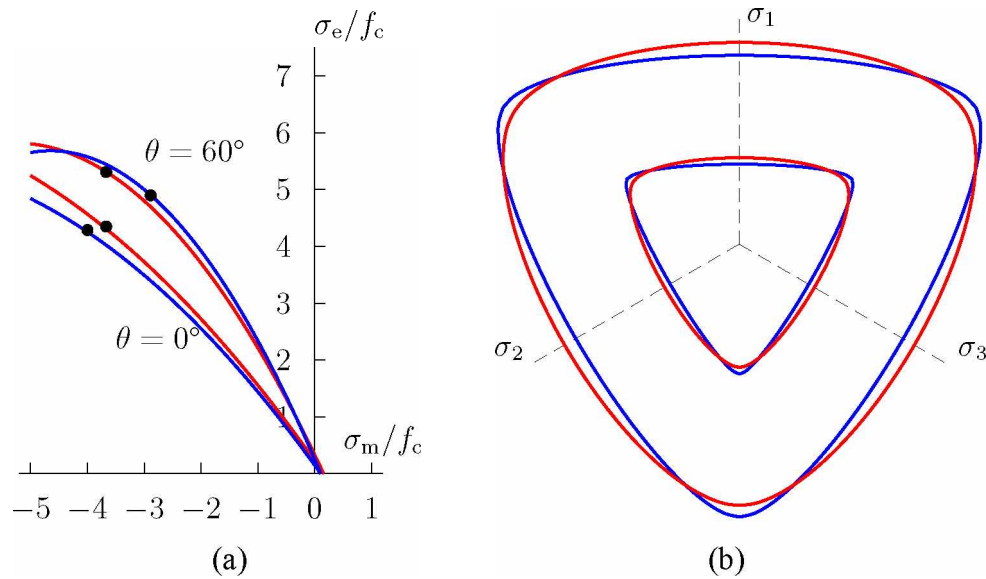
$$b_0 = -\bar{\sigma}_0 b_1 - \bar{\sigma}_0^2 b_2. \quad (5.60)$$

Willamin ja Warnken viisiparametrinen malli muodostaa konveksin murtopinnan mikäli seuraavat ehdot toteutuvat [25, Appendix AII],[5, Luku 5.8]:

$$a_0, b_0 > 0, \quad a_1, b_1 \leq 0, \quad a_2, b_2 \leq 0, \quad (5.61)$$

ja

$$\frac{\rho_t}{\rho_c} > \frac{1}{2}. \quad (5.62)$$



Kuva 5.8: Willamin-Warnken viisiparametrinen murtopinta: (a) meridiaanileikkaukset, (b) deviatorinen leikkaus keskimääräisen jännityksen arvoilla  $\sigma_m = -f_c$  ja  $-2,887f_c$ . Värikoodin merkitys vastaa taulukossa 5.2 esitettyjä materiaalikoearvojoukkoja.

Taulukko 5.2: Willamin-Warnken viisiparametrisen mallin materiaalikoearvot.

väri	$\bar{f}_t$	$\bar{f}_{bc}$	$\bar{\sigma}_1$	$\bar{\tau}_1$	$\bar{\sigma}_2$	$\bar{\tau}_2$	lähteet
sininen	0,10	1,16	-4,00	1,56	-2,887	1,79	[11]
punainen	0,15	1,80	-3,67	1,59	-3,67	1,94	[12]

Ehdot  $a_2, b_2 \leq 0$  valitettavasti aiheuttavat murtopinnan deviatorisen säteen pienenemisen hyvin suurilla hydrostaattisen paineen arvoilla, ja murtopinta leikkaa hydrostaattisen akselin. Tämä on vastoin kokeellisia havaintoja.<sup>1</sup> Leikkauspisteiden arvot ovat

$$(\sigma_m/f_c)_{t,\min} = \frac{-a_1 + \sqrt{a_1^2 - 4a_0a_2}}{2a_2}, \quad (\sigma_m/f_c)_{c,\min} = \frac{-b_1 + \sqrt{b_1^2 - 4b_0b_2}}{2b_2}. \quad (5.63)$$

Lisäksi puristus- ja vetomeridiaanit voivat leikata toisensa.

Kuvissa 5.8 esitettyjen käyrien parametrit on määritetty taulukon 5.2 materiaalikoearvoilla ja parametrit  $a_i$  ja  $b_i$  on esitetty taulukossa 5.3. Esitettäessä meridiaanikäyrät  $(\sigma_m, \sigma_e)$ -tasossa, kuten kuvassa 5.8, on taulukon 5.3 parametrit kerrottava luvulla  $\sqrt{15/2}$ .

<sup>1</sup>Käytännössä näin suuria hydrostaattisen jännityksen arvoja esiintyy hyvin harvoin.

Taulukko 5.3: Willamin-Warnken viisiparametrinen mallin parametrit.

väri	$a_0$	$a_1$	$a_2$	$b_0$	$b_1$	$b_2$
sininen	0,05334	-0,50362	-0,03215	0,09082	-0,85360	-0,09180
punainen	0,08065	-0,51604	-0,02960	0,11958	-0,76076	-0,07213

## 5.7 Ottosenin malli

Ottosenin neliparametrinen malli on alkuperäisessä muodossaan [19]

$$f(I_1, J_2, \theta) = A \frac{J_2}{f_c^2} + \Lambda(\theta) \frac{\sqrt{J_2}}{f_c} + B \frac{I_1}{f_c} - 1 = 0, \quad (5.64)$$

jossa

$$\Lambda(\theta) = \begin{cases} K_1 \cos[\frac{1}{3} \arccos(K_2 \cos 3\theta)] & \text{kun } \cos 3\theta \geq 0 \\ K_1 \cos\{\frac{1}{3}[\pi - \arccos(-K_2 \cos 3\theta)]\} & \text{kun } \cos 3\theta \leq 0 \end{cases}. \quad (5.65)$$

Tässä raportissa käytetään kuitenkin tehollisen jännityksen  $\sigma_e = \sqrt{3J_2}$  ja keskimääräisen jännityksen  $\sigma_m = \frac{1}{3}\sigma_{kk}$  avulla lausuttua muotoa

$$f(\sigma_m, \sigma_e, \theta) = a \left( \frac{\sigma_e}{f_c} \right)^2 + \lambda(\theta) \frac{\sigma_e}{f_c} + b \frac{\sigma_m}{f_c} - 1 = 0, \quad (5.66)$$

jossa funktio  $\lambda(\theta) > 0$  määritellään samoin kuin (5.65)

$$\lambda(\theta) = \begin{cases} k_1 \cos[\frac{1}{3} \arccos(k_2 \cos 3\theta)] & \text{kun } \cos 3\theta \geq 0 \\ k_1 \cos\{\frac{1}{3}[\pi - \arccos(-k_2 \cos 3\theta)]\} & \text{kun } \cos 3\theta \leq 0 \end{cases}. \quad (5.67)$$

Murtoehdon muodon (5.64) parametrien  $A, B, K_1$  ja  $K_2$  suhteet muodon (5.66) parametreihin  $a, b, k_1$  ja  $k_2$  ovat

$$a = 3A, \quad b = 3B, \quad k_1 = \sqrt{3}K_1, \quad k_2 = K_2. \quad (5.68)$$

Murtoehdossa (5.66) on neljä dimensiotonta ei-negatiivista parametria  $a, b, k_1$  ja  $k_2$ , ja  $\lambda$ :n lausekkeesta (5.67) nähdään, että  $k_2$ :n on oltava välillä  $0 \leq k_2 \leq 1$ . Murtopinnan koon deviatorisessa tasossa määrittää parametri  $k_1$  ja sen muotoon vaikuttaa parametri  $k_2$ .

Ottosenin ehto redusoituu Druckerin-Pragerin ehdoksi mikäli  $a = k_2 = 0$ , ja mikäli tämän lisäksi vaaditaan  $b = 0$  päädytään von Misesin ehtoon.

Murtoehto leikkaa hydrostaattisen akselin pisteessä

$$\sigma_m = \frac{f_c}{b}. \quad (5.69)$$

Ratkaisemalla ehdosta (5.66) deviatorinen jännitys  $\sigma_e = \sqrt{3J_2}$  keskimääräisen jännityksen  $\sigma_m$ :n funktiona saadaan yhtälö

$$\frac{\sigma_e}{f_c} = \frac{1}{2a} \left[ \sqrt{\lambda^2 - 4a(b\sigma_m/f_c - 1)} - \lambda \right]. \quad (5.70)$$

Yhteyden (5.69) avulla havaitaan, että  $b\sigma_m/f_c - 1 \leq 0$  ja koska parametrilta  $a$  vaadittiin ei-negatiivisuus, on yhtälön (5.70) juuret aina positiiviset.

Murtoehdon (5.66] neljä parametria voidaan ratkaista esimerkiksi seuraavan neljän murtotilan kokeen avulla.

1. Yksiaksaalinen puristusmurtolujuus  $f_c$  ( $\theta = 60^\circ$ ).
2. Yksiaksaalinen vetomurtolujuus  $f_t$  ( $\theta = 0^\circ$ ).
3. Kaksiaksaalinen puristusmurtolujuus  $f_{bc}$  ( $\theta = 0^\circ$ ).
4. Mielivaltainen murtotila ( $\sigma_{m4}, \sigma_{e4}$ ) puristusmeridiaanilla ( $\theta = 60^\circ$ ).

Näiden neljän kokeen avulla voidaan parametrit  $a, b, k_1$  ja  $k_2$  lausua koetulosten  $f_c, f_t, f_{bc}$  sekä ( $\sigma_m, \sigma_e$ ) avulla.

Määritetään ensin  $\lambda$  parametrin lausekkeet veto- ja puristusmeridiaaneilla

$$\lambda_t = \lambda(0^\circ) = k_1 \cos(\frac{1}{3} \arccos k_2), \quad (5.71)$$

$$\lambda_c = \lambda(60^\circ) = k_1 \cos[\frac{1}{3}(\pi - \arccos k_2)]. \quad (5.72)$$

Vetomeridiaaneilla sijaitsevat murtotilat (2) ja (3) johtavat ehtoihin

$$(\bar{f}_{bc})^2 a + \bar{f}_{bc} \lambda_t - \frac{2}{3} \bar{f}_{bc} b - 1 = 0, \quad (5.73)$$

$$(\bar{f}_t)^2 a + \bar{f}_t \lambda_t + \frac{1}{3} \bar{f}_t b - 1 = 0, \quad (5.74)$$

jossa on käytetty puristuslujuuteen suhteutettuja dimensiottomia suhteita  $\bar{f}_{bc} = f_{bc}/f_c$  ja  $\bar{f}_t = f_t/f_c$ .

Vastaavasti puristusmeridiaanilla sijaitsevat murtokokeet tuottavat lausekkeet

$$a + \lambda_c - \frac{1}{3} b - 1 = 0, \quad (5.75)$$

$$\bar{\sigma}_{e4}^2 a + \bar{\sigma}_{e4} \lambda_c + \bar{\sigma}_{m4} b - 1 = 0, \quad (5.76)$$

jossa jännitykset  $\bar{\sigma}_m$  ja  $\bar{\sigma}_e$  ovat puristuslujuuteen  $f_c$  suhteutettuja dimensiottomia jännityksiä

$$\bar{\sigma}_{m4} = \frac{\sigma_{m4}}{f_c}, \quad \bar{\sigma}_{e4} = \frac{\sigma_{e4}}{f_c}. \quad (5.77)$$

Yhtälöistä (5.73) ja (5.75) voidaan ratkaista suureet  $\lambda_t$  ja  $\lambda_c$ , joille saadaan lausekkeet

$$\lambda_t = \frac{1}{\bar{f}_{bc}} + \frac{2}{3}b - \bar{f}_{bc}a, \quad (5.78)$$

$$\lambda_c = 1 + \frac{1}{3}b - a. \quad (5.79)$$

Sijoittamalla nämä takaisin yhtälöihin (5.74) ja (5.76) saadaan yhtälösystemi vakioiden  $a$  ja  $b$  ratkaisemiseksi

$$\bar{\sigma}_{e4}a + \frac{\bar{\sigma}_{m4} + \frac{1}{3}\bar{\sigma}_{e4}}{\bar{\sigma}_{e4} - 1}b = -1, \quad (5.80)$$

$$a - \frac{m}{m\bar{f}_{bc} - 1}b = -\frac{m}{\bar{f}_{bc}}, \quad (5.81)$$

jossa on merkitty  $m = 1/\bar{f}_t = f_c/f_t$ . Näin vakiot  $a$  ja  $b$  määräytyvät täysin lujuusarvoista  $f_t, f_c, f_{bc}$ , sekä puristusmeridiaanilla sijaitsevasta murtopinnan pisteestä  $(\sigma_{m4}, \sigma_{e4})$ , ja ratkaisu voidaan kirjoittaa muodossa

$$b = \frac{m\bar{\sigma}_{e4}/\bar{f}_{bc} - 1}{\kappa + \frac{m\bar{\sigma}_{e4}}{m\bar{f}_{bc} - 1}}, \quad (5.82)$$

$$a = \frac{m}{m\bar{f}_{bc} - 1}b - \frac{m}{\bar{f}_{bc}}, \quad (5.83)$$

jossa lyhennysmerkintä  $\kappa$  on lauseke

$$\kappa = \frac{\bar{\sigma}_{m4} + \frac{1}{3}\bar{\sigma}_{e4}}{\bar{\sigma}_{e4} - 1}. \quad (5.84)$$

Tämän jälkeen voidaan määrittää funktion  $\lambda$  arvot veto- ja puristusmeridiaaneilla lausekkeista (5.78) ja (5.79). Merkitsemällä

$$\alpha_2 = \frac{1}{3}\arccos k_2, \quad (5.85)$$

ja käyttämällä identiteettiä  $\cos(\pi/3 - \alpha_2) = \cos(\pi/3)\cos\alpha_2 + \sin(\pi/3)\sin\alpha_2$  saadaan yhtälöt

$$\lambda_t = k_1 \cos \alpha_2, \quad (5.86)$$

$$\begin{aligned} \lambda_c &= \frac{1}{2}k_1(\cos \alpha_2 + \sqrt{3}\sin \alpha_2) \\ &= \frac{1}{2}(\lambda_t + \sqrt{3}\sqrt{k_1^2 - \lambda_t^2}). \end{aligned} \quad (5.87)$$

Taulukko 5.4: Ottosenin mallin parametrien riippuvuus  $\bar{f}_t$ -suhteesta.

$\bar{f}_t$	$a$	$b$	$k_1$	$k_2$
0,08	0,6026	12,289	8,3635	0,9914
0,10	0,4254	9,5889	6,7762	0,9801
0,12	0,3074	7,7909	5,7221	0,9646

Tästä vakiot  $k_1$  ja  $k_2$  saadaan ratkaistua, ja ne ovat

$$k_1 = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{\lambda_t^2 + \lambda_c^2 - \lambda_t \lambda_c}, \quad (5.88)$$

$$k_2 = \cos 3\alpha_2 = 4 \cos^2 \alpha_2 - 3 \cos \alpha_2 \quad (5.89)$$

$$= \left( \frac{\lambda_t}{k_1} \right) \left[ 4 \left( \frac{\lambda_t}{k_1} \right)^2 - 3 \right]. \quad (5.90)$$

Ottosenin malli on yksi parhaimmista betonin murtoehdoista ja toteuttaa betonin murtopinnan karakteristisen piirteet

1. Murtopinnan muoto deviatorisella tasolla muuttuu hydrostaattisen paineen kasvaessa yhä pyöreämmäksi.
2. Murtopinnan meridiaanit ovat paraabeleja, ja ne leikkaavat hydrostaattisen akselin yhdessä pisteessä (5.69)
3. Murtopinta on suljettu käyrä myös tasojännitystilassa.

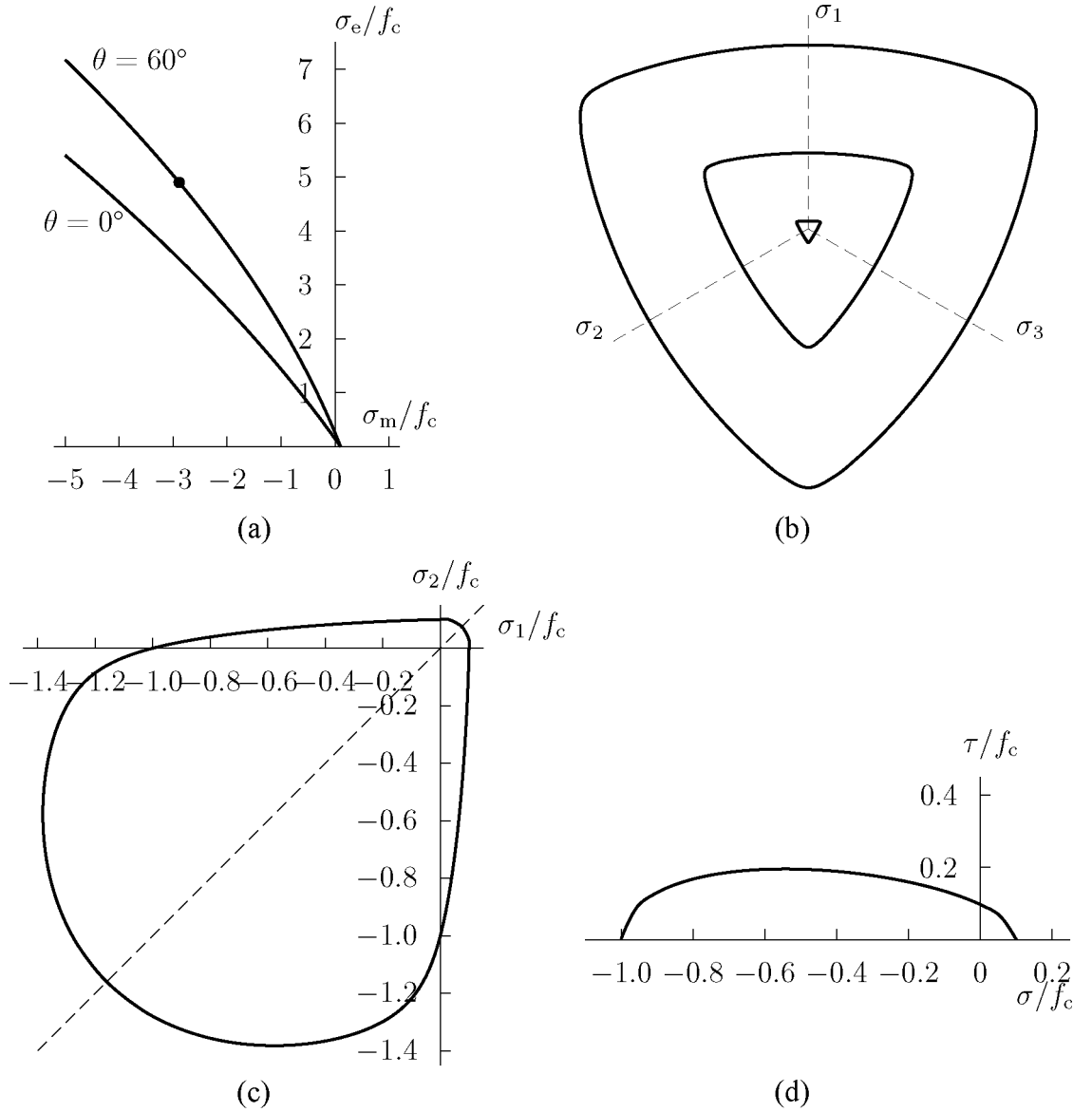
### 5.7.1 Koetulosten sovitukset

Tarkastellaan Ottosenin mallin sovitusta koetuloksiin. Määritetään murtopinta käyttäen seuraavia koetuloksia.

1. Yksiakselinen puristuslujuus  $f_c$ ,
2. kaksiakselinen puristuslujuus  $f_{bc} = 1,16 f_c$  [11],
3. yksiakselinen vetolujuus  $f_t = 0,08 f_c, 0,10 f_c$  tai  $0,12 f_c$ , eli  $m = 12,5; 10,0; 8, \bar{3}$ ,
4. lujuusarvo puristusmeridiaanilta pisteestä  $(\xi, \rho) = (-5 f_c, 4 f_c)$  [4], joka vastaa arvoja  $(\bar{\sigma}_m, \bar{\sigma}_e) = (-5/\sqrt{3}, 4\sqrt{3}/2) \approx (-2,887; 4,899)$ .

Näistä koetuloksista saadut Ottosenin mallin parametrit on esitetty taulukossa 5.4.

Mikäli tunnetaan vain betonin yksiakselinen puristuslujuus  $f_c$ , Dahl [6] on esittänyt seuraavat normaali- ja korkealujuusbetoneille ( $f_c < 80$  MPa) sopivat approksimaatiot



Kuva 5.9: Ottosenin neliparametrinen murtoehto ( $m = 10$ ,  $\bar{f}_{bc} = 1, 16$ ): (a) meridiaani-leikkaukset ja leikkaukset (b) deviatorisella tasolla kun  $\sigma_m = 0$  ( $\pi$ -taso),  $\sigma_m = -f_c$  ja  $\sigma_m = -2,887f_c$ , (c) tasojännitystilassa ja (d)  $(\sigma, \tau)$ -jännityksille.



Taulukko 5.5: Jännityspiste murtopinnalta, Dahl 1992 [6].

$f_c$ (Mpa)	$\xi/f_c$	$\sigma_m/f_c$	$\rho/f_c$	$\sigma_e/f_c$
10	-4,143	-2,392	3,6	4,409
20	-4,389	-2,534	3,6	4,409
30	-4,607	-2,660	3,6	4,409
40	-4,796	-2,769	3,6	4,409
50	-4,958	-2,863	3,6	4,409
60	-5,091	-2,939	3,6	4,409
70	-5,197	-3,000	3,6	4,409
80	-5,275	-3,046	3,6	4,409
90	-5,324	-3,074	3,6	4,409
100	-5,345	-3,086	3,6	4,409

parametreille  $A$ ,  $B$ ,  $K_1$  ja  $K_2$ , jotka perustuvat yksinomaan  $f_c$ -arvon tuntemiseen:

$$x = f_c/f_{c,\text{ref}}, \quad f_{c,\text{ref}} = 100 \text{ MPa}, \quad (5.91)$$

$$A = -1,66x^2 + 3,49x + 0,73, \quad (5.92)$$

$$B = -0,19x^2 + 0,41x + 3,13, \quad (5.93)$$

$$K_1 = 0,46x^2 - 0,97x + 11,89, \quad (5.94)$$

$$K_2 = -0,02x^2 + 0,04x + 0,974. \quad (5.95)$$

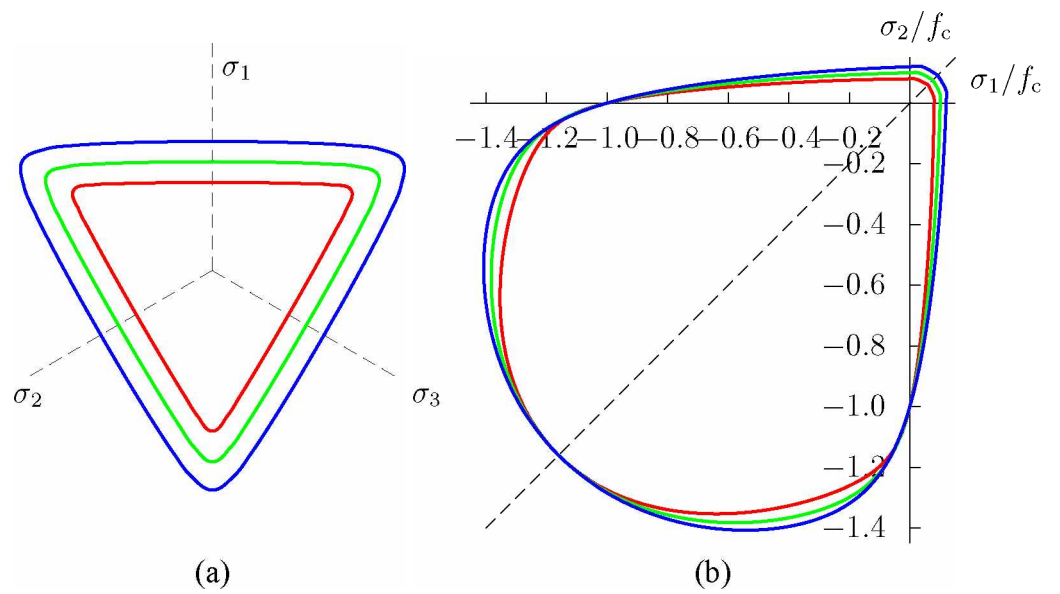
Yllä esitetty sovitus perustuu Dahlin tekemään koesarjaan sekä otaksumiin, että kaksi- ja yksiakselisen puristuslujuuden suhde on 1,16 ja yksiakselisen veto- ja puristuslujuuden suhde on 0,1. Näiden kahden otaksuman ja taulukossa 5.5 esitettyjen koetulosten (taulukko 5.1 lähteessä [6]) avulla Dahl sovitti yllä olevat kvadraattiset lausekkeet Ottosenin mallin parametreille. Yksiakselisen vetolujuuden valinta  $f_t = 0,1f_c$  tuntuu oudolta. Se vastaa parhaiten lujuusluokan C30 betonin ominaisuuksia. Luontevampi valinta olisi ollut esimerkiksi yhtälön (3.1) mukainen riippuvuus, katso kuvaa 3.2.

## 5.8 Lublinerin malli

Lublinerin mallina [18, 14] tunnetaan murtopinta<sup>2</sup>

$$f(I_1, J_2, \sigma_1) = \frac{1}{1 - \alpha} \left( \sqrt{3J_2} + \alpha I_1 + \beta \langle \sigma_1 \rangle - \gamma \langle -\sigma_1 \rangle \right) - c = 0, \quad (5.96)$$

<sup>2</sup>Tunnetaan myös Barcelonan mallin nimellä.



Kuva 5.10: Ottosenin neliparametrinen murtoehto ( $\bar{f}_{bc} = 1,16$ ), vetolujuuden variaation vaikutus: (a)  $\pi$ -tasoon (b) tasojännitystilaan. Puristusmeridiaanin piste  $\sigma_m = -f_c$  ja  $\sigma_m = -2,887f_c$ . Punainen viiva vastaa arvoa  $\bar{f}_t = 0,08$ , vihreä arvoa  $\bar{f}_t = 0,1$  ja sininen arvoa  $\bar{f}_t = 0,12$ .

jossa  $\sigma_1$  on suurin pääjännitys ja  $\alpha, \beta, \gamma$  ovat dimensiottomia vakioita ja  $c$  on materiaalin koheesio, joka voi olla lujittumisparametrin funktio. Koheesioparametrin arvo yhtyy yksiakselisen puristuslujuuden arvoon, eli  $c = f_c$ . Sulkeet  $\langle \cdot \rangle$  ovat Macaulayn-sulkeet, eli

$$\langle x \rangle = \frac{1}{2}(x + |x|). \quad (5.97)$$

Parametri  $\gamma$  vaikuttaa vain kolmiakselisessa puristuksessa, jossa  $\sigma_1 < 0$ . Murtopinnan muoto deviatorisessa tasossa ei muutu  $\sigma_m$ :n funktiona, jolloin se ei sovellu hyvin kuvaamaan betonin käyttäytymistä suuren hydrostaattisen paineen alaisuudessa.

Puristuksessa murtopinta (5.96) on Druckerin-Pragerin kaltainen, eli sen meridiaaniviivat ovat suoria. Parametri  $\alpha$  voidaan määrittää kun tunnetaan kaksi- ja yksiakseliset puristuslujuudet lausekkeesta (5.19), eli

$$\alpha = \frac{(f_{bc}/f_c) - 1}{2(f_{bc}/f_c) - 1} = \frac{\bar{f}_{bc} - 1}{2\bar{f}_{bc} - 1}. \quad (5.98)$$

Kaksi- ja yksiakselisen murtolujuuden suhde on yleensä välillä 1,1–1,3, jolloin parametrin  $\alpha$  vaihteluväli on 0,08–0,185. Mikäli käytetään Kupferin kokeista saamaa arvoa  $\bar{f}_{bc} = 1,16$  saadaan parametrille  $\alpha$  arvo 0,12.

Parametri  $\beta$  voidaan määrittää kun tunnetaan yksiakselisten puristus- ja vetolujuuksien suhde

$$m = \frac{f_c}{f_t} = \frac{1 + \alpha + \beta}{1 - \alpha}, \quad (5.99)$$

josta saadaan

$$\beta = (1 - \alpha)m - (1 + \alpha). \quad (5.100)$$

Mikäli  $\alpha = 0,12$  ja  $m = 10$ , saadaan parametrille  $\beta$  arvo 7,68.

Parametri  $\gamma$  vaikuttaa vain mikäli kaikki pääjännitykset ovat puristavia, eli  $\sigma_1 < 0$ , kun käytetään merkintätapaa  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ . Puristusmeridiaanilla ( $\sigma_1 = \sigma_2 > \sigma_3$ ) suurin pääjännitys on

$$\sigma_1 = \frac{1}{3}(I_1 + \sqrt{3J_2}) = \sigma_m + \frac{1}{3}\sigma_e, \quad (5.101)$$

ja puristusmeridiaaniviivan lausekkeeksi lausekkeet

$$\begin{cases} (1 + \frac{1}{3}\gamma)\sigma_e + (3\alpha + \gamma)\sigma_m - (1 - \alpha)c = 0 & \text{kun } \sigma_1 < 0, \text{ eli } \sigma_m < -\frac{1}{3}\sigma_e \\ (1 + \frac{1}{3}\beta)\sigma_e + (3\alpha + \beta)\sigma_m - (1 - \alpha)c = 0 & \text{kun } \sigma_1 > 0, \text{ eli } \sigma_m > -\frac{1}{3}\sigma_e \end{cases}. \quad (5.102)$$

Vastaavasti vetomeridiaanilla ( $\sigma_1 > \sigma_2 = \sigma_3$ ) suurin pääjännitys on

$$\sigma_1 = \frac{1}{3}(I_1 + 2\sqrt{3J_2}) = \sigma_m + \frac{2}{3}\sigma_e, \quad (5.103)$$

ja vetomeridiaaniviivan lausekkeiksi saadaan

$$\begin{cases} (1 + \frac{2}{3}\gamma)\sigma_e + (3\alpha + \gamma)\sigma_m - (1 - \alpha)c = 0 & \text{kun } \sigma_1 < 0, \text{ eli } \sigma_m < -\frac{2}{3}\sigma_e \\ (1 + \frac{2}{3}\beta)\sigma_e + (3\alpha + \beta)\sigma_m - (1 - \alpha)c = 0 & \text{kun } \sigma_1 > 0, \text{ eli } \sigma_m > -\frac{2}{3}\sigma_e \end{cases}. \quad (5.104)$$

Eliminoimalla invariantti  $\sigma_m$  puristus- ja vetomeridiaanien lausekkeista (5.102) ja (5.104) saadaan meridiaanisäteiden suhteelle  $\rho_t/\rho_c$  lauseke (mikäli  $\sigma_1 < 0$ )

$$\frac{\rho_t}{\rho_c} = \frac{\gamma + 3}{2\gamma + 3}, \quad \text{josta} \quad \gamma = 3 \frac{1 - \rho_t/\rho_c}{2(\rho_t/\rho_c) - 1}. \quad (5.105)$$

Tämä suhde vaihtelee välillä 0,5–1, ja valitsemalla arvo 2/3 saadaan  $\gamma$ -parametrille arvo 3.

Meridiaanileikkaukset koostuvat siten kahdesta lineaarisesta osasta kuten myös modifioitussa Mohrin-Coulombin murtoehdossa.

Lublinerin mallin murtopinta on esitetty kuvassa 5.11.

## 5.9 Muita murtoehtoja

Hsieh, Ting ja Chen esittivät vuonna 1979 seuraavan neliparametrisen murtoehdon

$$f(\sigma_m, \sigma_e, \sigma_1) = a' \left( \frac{\sigma_e}{f_c} \right)^2 + b' \frac{\sigma_e}{f_c} + c' \frac{\sigma_1}{f_c} + d' \frac{\sigma_m}{f_c} - 1 = 0, \quad (5.106)$$

jossa  $\sigma_1$  on suurin pääjännitys. Se muistuttaa hieman Ottosenin mallia ja sen meridiaaniviivat ovat paraabeleja. Deviatorisella tasossa siinä on kulmapiste puristusmeridiaanilla. Murtopinnan muoto ei riipu hydrostaattisesta paineesta, mitä voidaan pitää mallin puutteena.

## 5.10 Murtopintojen vertailu

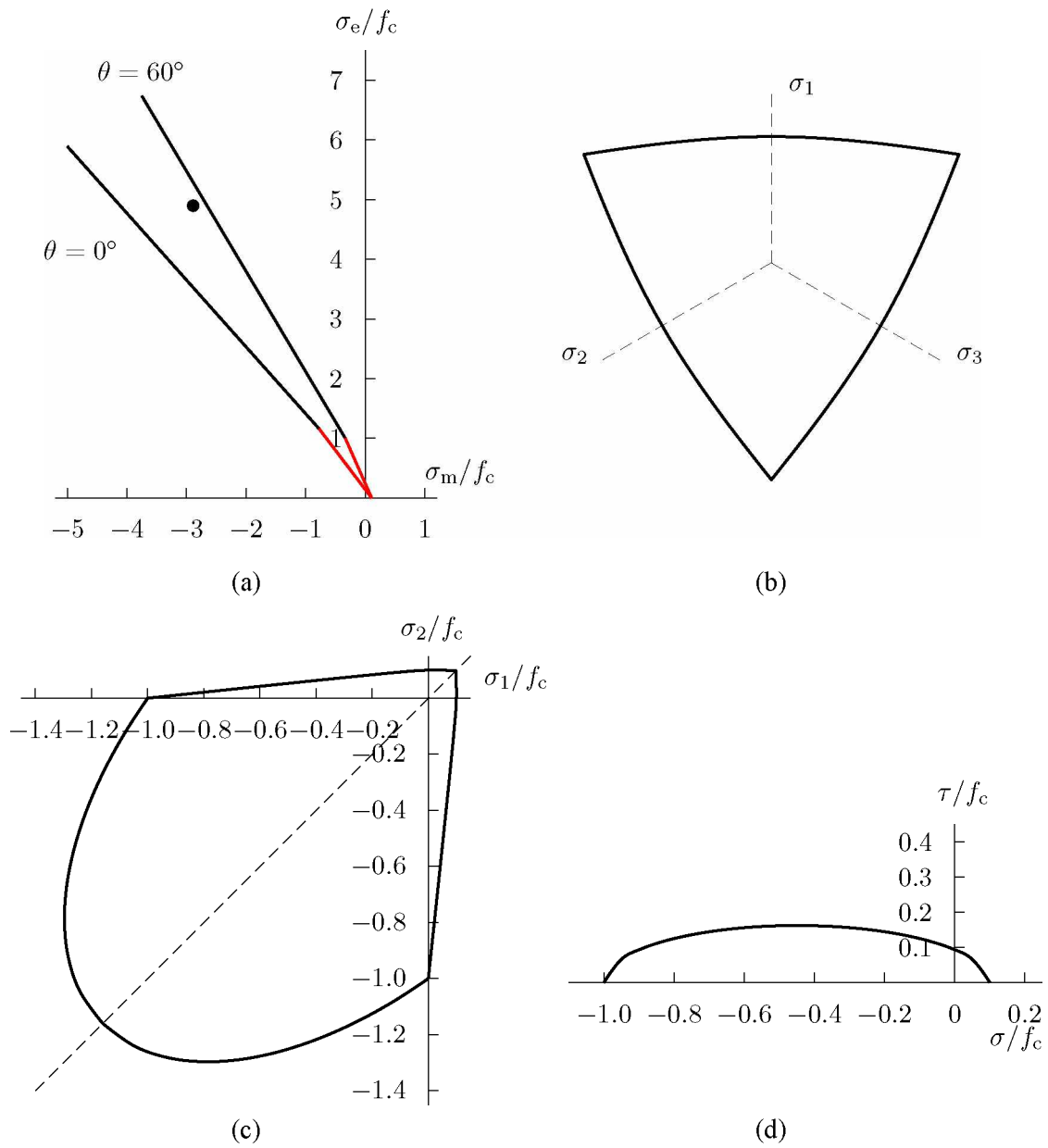
Valitaan vertailtavaksi modifioitu Mohrin-Coulombin, Ottosenin ja Lublinerin murtoehdot. Vertailu on suoritettu käyttäen lujuusarvoja  $f_t = 0,1f_c$ ,  $f_{bc} = 1,16f_c$ . Sekä Ottosenin ja modifioitun Mohrin-Coulombin murtopintojen puristusmeridiaani on sovitettu pisteen  $(\bar{\sigma}_m, \bar{\sigma}_e) = (-2,887; 4.899)$  mukaisesti. Luonnollisestikaan modifioitua Mohrin-Coulombin ehtoa ei voi sovittaa samanaikaisesti yksiakseliselle ja kaksiakseliselle puristukselle. Lublinerin mallissa on valittu puristus- ja vetomeridiaanien suhteeksi 2/3.

Kuvassa 5.12 on esitetty murtopintojen deviatorinen leikkaus  $\pi$ -tasolla sekä keskimääräisen jännityksen arvolla  $\sigma_m = -f_c$ . Kuvaan 5.13 on piirretty murtopintojen meridiaanileikkaukset sekä projektiot tasojännitystilaan. Kupferin et al. [11] tasojännitystilan koetulokset ovat Ottosenin ja Lublinerin murtopintojen välissä.

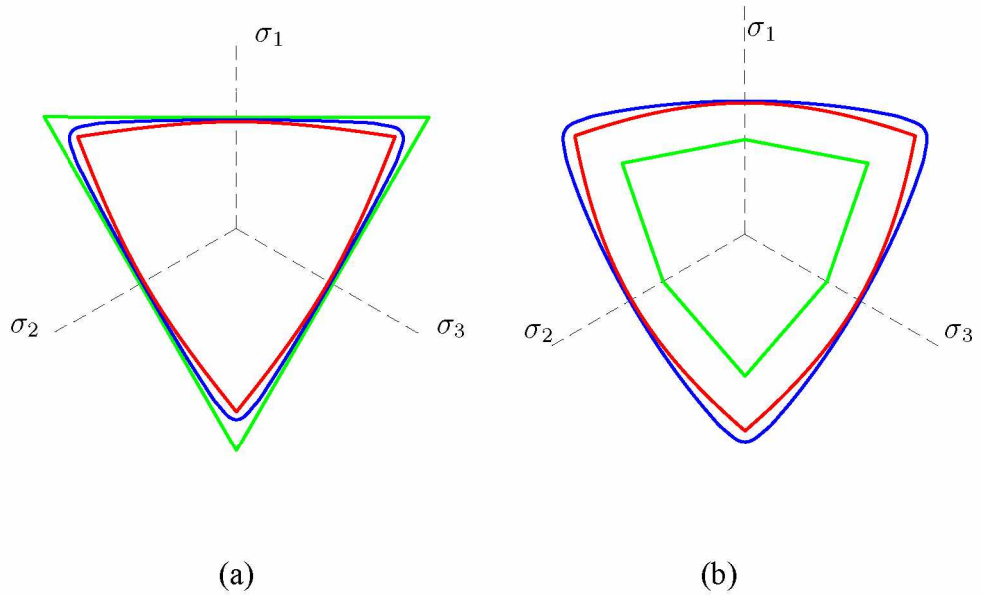
## 5.11 Myötölujeneminen ja -pehmeneminen

### 5.11.1 Yksiakselialinen käyttäytyminen

Edellä esitettyjä murtoehtoja voidaan soveltaa myös myötöehtoina, ja materiaalin käyttäytyminen plastisessa tilassa määräytyy myötösäännön mukaisesti. Mallissa (5.96), Lubliner et al. [18], koheesioparametri  $c$  otaksutaan sisäisen muuttujan  $\kappa$  funktioksi:  $c = c(\kappa)$ .



Kuva 5.11: Lublinerin mallin murtopinta: (a) meridiaanileikkaukset, (b)  $\pi$ -taso, (c) ta-sojännitystilassa ja (d)  $\sigma - \tau$  jännityksille.



Kuva 5.12: Murtopintojen vertailu deviatorisella tasolla. Vihreä viiva on vedossa katkaistu Mohr-Coulomb, sininen Ottosenin malli ja punainen viiva kuvaa Lublinerin mallia. (a)  $\pi$ -taso, (b)  $\sigma_m = f_c$ .

Sisäinen muuttuja  $\kappa$  määritellään erikseen yksiakselisten puristus- ja vetokokeista saatujen tulosten perusteella. Näistä kokeista saadaan jännitys ilmaistua plastisen muodonmuutoksen avulla, katso kuvaa 5.14.

Kuvan 5.14 muotoisten kuvaajien lausekkeeksi voidaan valita

$$\sigma = f_0[(1 + a) \exp(-b\varepsilon^p) - a \exp(-2b\varepsilon^p)], \quad (5.107)$$

jossa  $a$  ja  $b$  ovat dimensiottomia vakioita. Mikäli  $a < 1$  materiaali pehmenee heti myödyn jälkeen. Vastaavasti tapauksessa  $a > 1$  materiaali lujittuu ensimmäisen myödyn jälkeen ennen kuin saavutetaan jännityksen maksimi ja alkaa pehmenemisvaihe. Tämä on helppo havaita laskemalla derivaatta

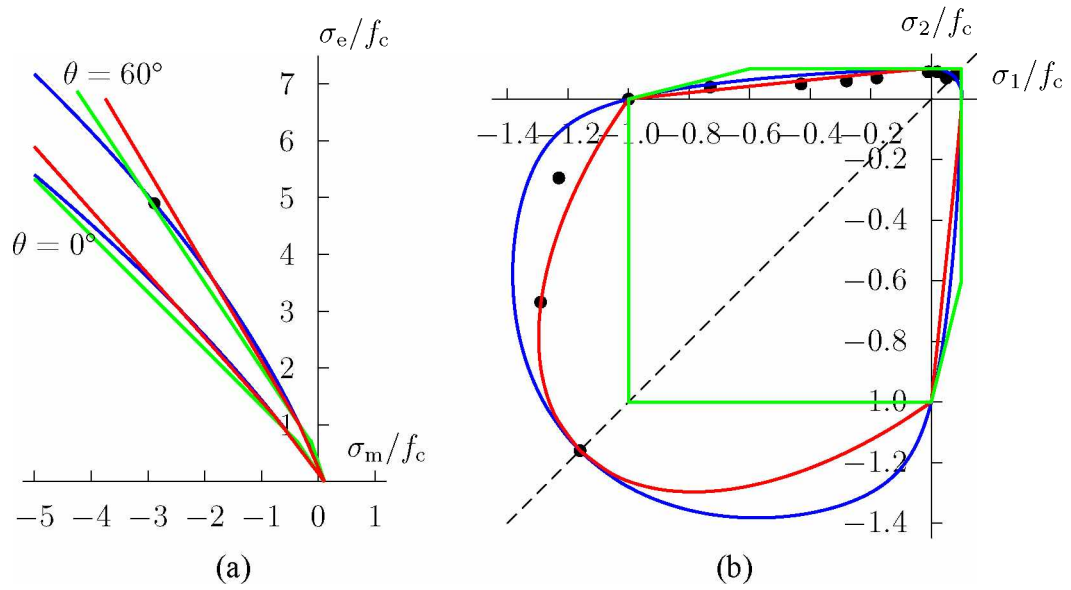
$$\left. \frac{d\sigma}{d\varepsilon^p} \right|_{\varepsilon^p=0} = f_0 b(a - 1). \quad (5.108)$$

Integroimalla ala, katso kuva 5.14, saadaan

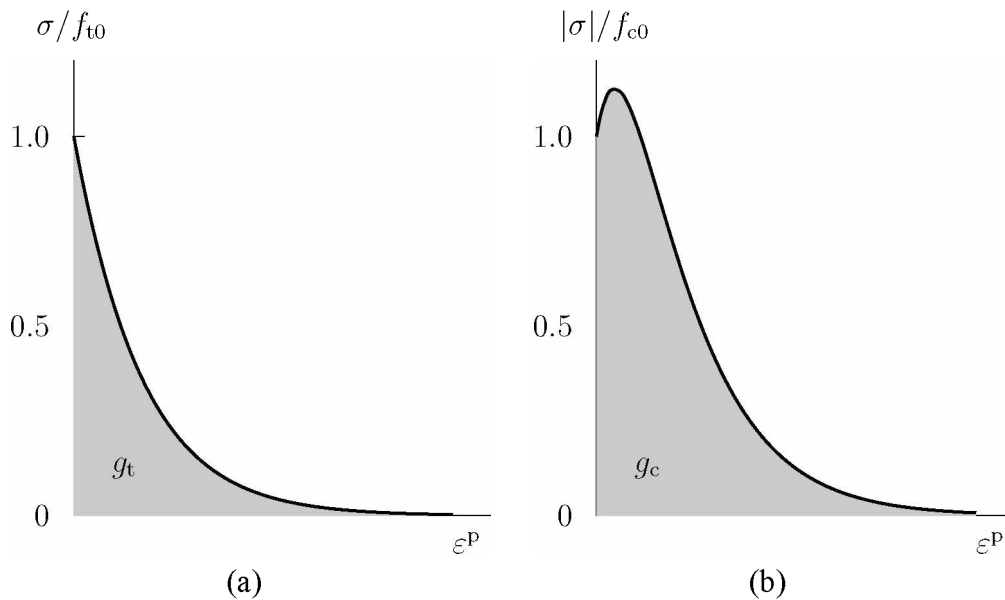
$$g = \int_0^\infty \sigma d\varepsilon^p = \frac{f_0}{b} \left(1 + \frac{1}{2}a\right). \quad (5.109)$$

Sisäinen muuttuja  $\kappa$  määritellään nyt vedossa ja puristuksessa seuraavasti

$$\kappa_t = \frac{1}{g_t} \int_0^{\varepsilon^p} \sigma d\varepsilon^p, \quad \kappa_c = \frac{1}{g_c} \int_0^{\varepsilon^p} \sigma d\varepsilon^p. \quad (5.110)$$



Kuva 5.13: Murtopintojen vertailu (a) meridiaanitasoilla ja (b) tasojännitystilassa. Vihreä viiva on vedossa katkaistu Mohr-Coulomb, sininen Ottosenin malli ja punainen viiva kuvaa Lublinerin mallia,  $\bar{f}_t = 0,1$ ;  $\bar{f}_{bc} = 1,16$ . Mustat ympyrät ovat Kupferin koetulokset [11].



Kuva 5.14: Yksiakseliset  $(\sigma - \varepsilon^p)$  kuvaajat (a) vedossa ja (b) puristuksessa.

Tällöin kuvissa 5.14a ja 5.14b esitetyt käyrät voidaan esittää sisäisen muuttujan funktiona:

$$\sigma = f_t(\kappa), \quad f_t(0) = f_{t0}, \quad f_t(1) = 0, \quad (5.111)$$

$$\sigma = f_c(\kappa), \quad f_c(0) = f_{c0}, \quad f_c(1) = 0. \quad (5.112)$$

Integroimalla

$$\kappa = \frac{1}{g} \int_0^{\varepsilon^P} \sigma \, d\varepsilon^P = 1 - \frac{1}{2+a} [2(1+a) \exp(-b\varepsilon^P) - a \exp(-2b\varepsilon^P)], \quad (5.113)$$

josta saadaan, mikäli  $a \neq 0$ ,

$$\exp(-b\varepsilon^P) = \frac{1}{a} [1 + a - \sqrt{1 + a(2+a)\kappa}]. \quad (5.114)$$

Jännityksen lausekkeeksi sisäisen muuttujan funktiona saadaan

$$\sigma = f(\kappa) = \frac{f_0}{a} [(1+a)\sqrt{\Phi(\kappa)} - \Phi(\kappa)], \quad (5.115)$$

jossa

$$\Phi(\kappa) = 1 + a(2+a)\kappa. \quad (5.116)$$

Mikäli  $a > 1$  on funktiolla  $f$  maksimiarvo, joka on  $f_m = f_0(1+a)^2/4a$ . Kun tunnetaan arvot  $f_0$  ja  $f_m$ , voidaan parametri  $a$  lausua niiden funktiona

$$a = 2(f_m/f_0) - 1 + 2\sqrt{(f_m/f_0)^2 - (f_m/f_0)}. \quad (5.117)$$

Suure  $g_t$  voidaan lausua säröä ajavan voiman  $G_f$  avulla,

$$g_t = G_f/l_{ch}, \quad (5.118)$$

jossa  $l_{ch}$  on materiaalin karakteristinen mitta, joka kuvaa pehmenemisvaiheen deformaation paikallistumisvyöhykkeen leveyttä. Puristuksessa suurella  $g_c$  ei ole vastaavanlaisia yhteyttä puristumurtoa kuvaavaan *todelliseen materiaali parametriin*. Puristumurto ei tapahdu pelkästään yhden fysikaalisen vaurioproessin tuloksena, ja on hyvin todennäköistä ettei siihen voi liittää tiettyä fysikaalista voimasuuretta.

Suureet  $g_t$  ja  $g_c$  kuvaavat plastisoitumis- ja säröilyprosesseissa dissipoituvan energian määrää tilavuusyksikköä kohden.

Myötopehmenevien materiaaalimallien käyttö numeerisen laskennan yhteydessä johtaa pehmenemisalueella vakavaan verkkoriippuvuusongelmaan, mikäli malli perustuu klassiseen Cauchyn kontinuumiteoriaan ja materiaaalimalli ei riipu muodonmuutosnopeudesta.

Mikäli  $g_t$  valitaan elementin koosta riippuvaksi, saadaan pehmenemisvaiheessa verkkoriippumattomia ratkaisuja. Ongelman ratkaisutapa ei tällöin ole kuitenkaan fysikaalisesti hyvin perusteltu.



### 5.11.2 Yleistys

Lublinerin mallin myötöehdossa on koheesioparametri  $c$  on sisäisen muuttujan  $\kappa$  funktio  $c = c(\kappa)$ . Merkitään koheesionparametrin muuttumista kuvaavaa nopeusmuotoista yhtälöä seuraavasti

$$\dot{c} = k(\boldsymbol{\sigma}, \kappa, c) \dot{\kappa}. \quad (5.119)$$

Edellä esitetyn perusteella on ilmeistä, että kaikille kuormitusprosesseille on oltava  $c \rightarrow 0$  kun  $\kappa \rightarrow 1$ . Koheesioparametrin on lisäksi yhdyttävä yksiakselisessa puristuksessa puristusjännityksen arvoon, eli  $c = f_c(\kappa)$  ja vastaavasti vetokokeessa  $c = (f_{c0}/f_{t0}) f_t(\kappa)$ . Lubliner valitsee funktiolle  $k$  muodon [18]

$$k(\boldsymbol{\sigma}, \kappa, c) = c \left[ \frac{r(\boldsymbol{\sigma})}{f_t(\kappa)} \frac{df_t}{d\kappa} + \frac{1 - r(\boldsymbol{\sigma})}{f_c(\kappa)} \frac{df_c}{d\kappa} \right], \quad (5.120)$$

jossa

$$r(\tilde{\sigma}) = \frac{\sum_{i=1}^3 \langle \tilde{\sigma}_i \rangle}{\sum_{i=1}^3 |\tilde{\sigma}_i|}, \quad (5.121)$$

jossa  $\langle x \rangle = (x + |x|)/2$ . Evoluutioyhtälön (5.119) verrannollisuuskerroin  $k$  (5.120) on johdettu tarkastelemalla yksiakselista puristusta ja vetoa. Skalaarifunktio  $r(\boldsymbol{\sigma})$  on painokerroin joka yleistää evoluution jatkuvasti myös muihin kuormitustiloihin.

Vaatimuksen  $c \rightarrow 0$  kun  $\kappa \rightarrow 1$  toteutuminen on osoitettu lähteessä [18, sivu 305].

## 5.12 Yhteenvedo

Tässä luvussa on käsitelty muutamia tunnettuja betonin murtoehtoja. Modifioitu Mohrin-Coulombin murtoehto on yksinkertaisin mahdollinen murtoehto, joka kvalitatiivisesti ottaa huomioon betonin käyttäytymisen erityspiirteet. Murtopinnan kuvaamiseen tarvitaan vain kolme lujuusarvoa: yksiakseliset veto- ja puristuslujuudet sekä kitkakulma tai piste puristusmeridiaanilta. Malli ei kuvaa hyvin kaksiakselista puristusta, jossa se aliarvioi betonin lujuuden.

Ottosenin ja Lublinerin malleissa tarvitaan lisäkokeita. Ottosenin mallissa tarvitaan neljäs koepiste, joka usein valitaan puristusmeridiaanilta. Lublinerin mallissa tarvitaan lisäksi veto- ja puristusmeridiaanien säteiden suhde. Se edellyttäisi koepistettä vetomeridiaanilta. Varsin hyvä valinta kyseiselle suhteelle on  $2/3$ .

Betonin käyttäytymisen mallintaminen myötöpehmenevällä alueella on hyvin vaikeaa. Yhtä mallinnustapaa käsitellään seuraavassa luvussa, jossa esitellään Leen ja Fenvesin malli, joka pohjautuu Lublinerin malliin ja on erityisesti suunniteltu syklisiä kuormituksia silmälläpitäen.

Tässä luvussa ei ole esitetty miten betonin elastiset ominaisuuden muuttuvat ennen murtopinnan saavuttamista. Näiden mallien yhteydessä käytetyistä epälineaarisesti kimmomaisista malleista kiinnostunut löytää lisätietoa lähteistä [5, 20]. Uudempi tapa kuvata

betonin vähittäistä vaurioitumista on käyttää vaurioituvan aineen malleja, joita kuvataan seuraavassa luvussa.

# Luku 6

## CDM-mallit

### 6.1 Johdanto

Vaurioituvan aineen mallit pyrkivät kuvaamaan materiaalin mikrorakenteessa tapahtuvia palautumattomia vaurioprosesseja, joita ovat mikrohalkeilu ja materiaalissa olevien pienten huokosten syntyminen ja kasvu. Vuonna 1958 L.M. Kachanov otti käyttöön skalaarisen sisäisen muuttujan kuvaamaan vauriota. Tämä vauriomuuttuja määritellään tietyssä materiaalipinnassa vaurioituneen pinta-alan suhteena alkuperäiseen pinta-alaan, eli

$$D = \frac{dA_D}{dA}, \quad (6.1)$$

joten vaurioparametrin  $D$  sallittu arvoalue on  $0 \leq D \leq 1$ . Mikäli mikrohuokosten ja -säröjen oletetaan jakautuvan tasaisesti eri suunnille on vaurioituminen isotrooppista ja sitä voidaan kuvata yhdellä skalaarimuuttujalla. Sitkeiden materiaalien tapauksessa vauriomuuttuja voidaan määritellä myös mikrohuokosten tilavuusosuutena [16, sivu 2].

Kun vaurioitumista kuvataan skalaarisella muuttujalla voidaan tasapainoyhtälöissä vaikuttava jännitys kimmoisan ja vaurioituvan materiaalimallin tapauksessa lausua muodossa

$$\boldsymbol{\sigma} = (1 - D)\mathbf{C}_e\boldsymbol{\varepsilon}, \quad (6.2)$$

jossa  $\mathbf{C}_e$  on kimmotensori. Ehyessä materiaalissa vaikuttava tehollinen jännitys on

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}} = \frac{\boldsymbol{\sigma}}{1 - D}. \quad (6.3)$$

Isotrooppinen vauriomuuttuja soveltuu parhaiten kuvaamaan sitkeiden materiaalien vaurioitumista. Hauraan materiaalin käyttäytymisen kuvaamiseen soveltuu vauriomuuttujalle paremmin vektorimuotoinen, toisen tai neljännen kertaluvun tensoriaalinen esitystapa. Vaurion kuvaamista hankaloittaa myös sen unilateraalinen käyttäytyminen. Halkeama vaikuttaa usein efektiivisiin ominaisuuksiin vain vedossa halkeamatason normaalin suunnassa. Puristettaessa tähän suuntaan materiaali käyttäytyy vaurioitumattoman aineen tavoin.

Jatkuvan aineen vaurioitumismekaniikkaa käsitteleviä teoksia ovat mm. [10, 15, 16, 23, 24].

## 6.2 Isotrooppisen vaurion mittaaminen

Lemaitre [15, luku 1.3] esittää seitsemän erilaista epäsuoraa tapaa mitata isotrooppista vauriomuuttujaa.

1. Mittaamalla kimmokertomen muuttumista saadaan vauriomuuttujan arvo määritetyksi yhtälöstä

$$D = 1 - \frac{E}{E_0}, \quad (6.4)$$

jossa  $E$  on tarkasteluhetken näennäinen kimmokerroin ja  $E_0$  on vaurioitumattoman materiaalin kimmokerroin. Kimmokertoimen muuttumiseen perustuva määrittäminen edellyttää kuormituksen palauttamista, katso kuvaa 7.4.

2. Vauriomuuttujan arvo voidaan määrittää myös äänennopeuteen perustuvilla mittauksilla. Betonille suositeltava ultraäänen taajuusalue on 0.1 - 1 MHz [15, sivu 25]. Pitkittäisen aallon etenemisnopeus on

$$v_L = \sqrt{\frac{1 - \nu}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \frac{E}{\rho}}. \quad (6.5)$$

Olettamalla vaurion vaikutukset tiheyteen ja Poissonin vakioon merkityksettömiksi, saadaan

$$D = 1 - \frac{E}{E_0} = 1 - \frac{\rho}{\rho_0} \frac{v_L^2}{v_{L0}^2} \approx 1 - \frac{v_L^2}{v_{L0}^2}. \quad (6.6)$$

3. Sitkeille materiaaleille vauriomuuttujan arvo voidaan määrittää myös kovuuteen perustuvilla mittauksilla. Kovuuden ja plastisen myötölujuuden välillä vallitsee lineaarinen yhteys, josta voidaan johtaa tulos

$$D = 1 - \frac{H_0}{H}, \quad (6.7)$$

jossa  $H_0$  on vaurioitumattoman materiaalin kovuus, joka voidaan määrittää lähteessä [15, sivu 27] esitetyllä tavalla.

4. Vaikka tiheyden muutokset ovat pieniä voidaan niiden avulla vauriomuuttujan arvo määrittää sitkeille materiaaleille, joiden vaurioituminen voidaan ajatella johtuvat liikkimain pallomaisten mikrohuokosten tilavuuden kasvusta. Tästä lähtökohdasta edeten saadaan tulos

$$D = (1 - \rho/\rho_0)^{2/3}. \quad (6.8)$$

5. Koekappaleen sähköiseen vastukseen perustuvassa mittauksessa vauriomuuttujan arvo voidaan määrittää yhtälöstä

$$D \approx 1 - \frac{V_0}{V}, \quad (6.9)$$

jossa  $V_0$  on jännite (potentiaali) vaurioitumattoman kappaleen läpi mitattuna.

6. Sitkeille materiaaleille vauriomuuttujan arvo voidaan myös määrittää toistuvassa kuormitustestauksessa, joka aiheuttaa plastisia muodonmuutoksia (low cycle fatigue). Jännitysamplitudin muutoksen  $\Delta\sigma$  avulla vauriomuuttujan arvolle saadaan lauseke

$$D = 1 - \frac{\Delta\sigma_0}{\Delta\sigma}. \quad (6.10)$$

7. Metallit ovat alttiita virumismurrolle mikäli niitä kuormitetaan lämpötilassa, joka on yli kolmasosan niiden sulamislämpötilasta. Virumismurtotapahtuma alkaa siirryttäessä sekundäärivirumavaiheesta tertiäärivaiheeseen. Otaksumalla Nortonin tyyppinen virumisnopeusmalli, eksponentti  $N$ , saadaan vauriomuuttujan arvolle lauseke

$$D = 1 - \left( \frac{\dot{\epsilon}_p}{\dot{\epsilon}_{p0}} \right)^{1/N}, \quad (6.11)$$

jossa  $\dot{\epsilon}_{p0}$  on sekundäärivaiheen lopun virumisnopeus, eli tertiäärivaiheen alun virumisnopeus.

Betonille mahdollisesti soveltuvia vaurion mittaustapoja ovat 1,2 ja 5.

## 6.3 Leen ja Fenvesin malli

### 6.3.1 Vaurioituva kimmoplastinen malli

Leen ja Fenvesin malli [13, 14] on muunnelma Lublinerin betonimallista, Lubliner et al. [18]. Siinä yhdistyy isotrooppinen vauriomalli kimmoplastiseen malliin. Jännitys saadaan siten yhtälöstä

$$\boldsymbol{\sigma} = (1 - D)\mathbf{C}_e\boldsymbol{\epsilon}^e = (1 - D)\mathbf{C}_e(\boldsymbol{\epsilon} - \boldsymbol{\epsilon}^p), \quad (6.12)$$

jossa  $\mathbf{C}_e$  on materiaalin elastisuustensori ja  $D$  on skalaari vauriomuuttuja, joka jaetaan veto- ja puristusvauriota kuvaaviin osuuksiin  $D_t$  ja  $D_c$  seuraavasti

$$D = 1 - (1 - D_t)(1 - D_c) \quad \text{eli} \quad 1 - D = (1 - D_t)(1 - D_c), \quad (6.13)$$

jossa  $0 \leq D_t < 1$  ja  $0 \leq D_c < 1$ . Vaurioparametrit  $D_t$  ja  $D_c$  ovat sisäisten tilamuuttujien  $\kappa_t$  ja  $\kappa_c$  (5.110) funktioita

$$D_t = D_t(\kappa_t), \quad D_c = D_c(\kappa_c). \quad (6.14)$$

Merkitään nyt veto- tai puristusvauriota geneerisellä symbolilla  $\aleph$ , joka voi saada arvot  $\aleph = t$  tai  $\aleph = c$ . Yksiaksellinen jännitys-plastinen muodonmuutosrelaatio voidaan on yhtälön (5.107) mukainen

$$\sigma_{\aleph} = f_{\aleph 0}[(1 + a_{\aleph}) \exp(-b_{\aleph} \varepsilon^P) - a_{\aleph} \exp(-2b_{\aleph} \varepsilon^P)], \quad (6.15)$$

jossa  $f_{\aleph 0}$  on vaurioitumattoman materiaalin neitseellinen myötölujuus. Materiaalin vaurioitumiselle otaksutaan myös eksponentiaalinen riippuvuus plastisesta muodonmuutoksesta

$$1 - D_{\aleph} = \exp(-d_{\aleph} \varepsilon^P), \quad (6.16)$$

jossa  $d_{\aleph}$ :t ovat materiaalivakioita. Tehollinen jännitys on siten

$$\tilde{\sigma}_{\aleph} = f_{\aleph 0}[(1 + a_{\aleph})(\exp(-b_{\aleph} \varepsilon^P))^{1-(d_{\aleph}/b_{\aleph})} - a_{\aleph}(\exp(-b_{\aleph} \varepsilon^P))^{2-(d_{\aleph}/b_{\aleph})}]. \quad (6.17)$$

Sisäiset muuttujat  $\kappa_{\aleph}$  määritellään kuten yhtälössä (5.116) ja vaurioitumis sekä plastisointumisprosessissa dissipoituva energia saadaan yhtälön (5.109) avulla. Sisäisen muuttujan  $\kappa_{\aleph}$  avulla lausuttu tehollinen jännitys on muotoa

$$\tilde{\sigma}_{\aleph} = \tilde{f}_{\aleph}(\kappa_{\aleph}) = f_{\aleph 0} \sqrt{\Phi_{\aleph}(\kappa_{\aleph})} \left[ \frac{1 + a_{\aleph} - \sqrt{\Phi_{\aleph}(\kappa_{\aleph})}}{a_{\aleph}} \right]^{1-d_{\aleph}/b_{\aleph}}, \quad (6.18)$$

jossa funktio  $\Phi_{\aleph}$  määritellään kuten yhtälössä (5.115), eli  $\Phi_{\aleph}(\kappa_{\aleph}) = 1 + a_{\aleph}(2 + a_{\aleph})\kappa_{\aleph}$ . Vastaavasti vauriomuuttujalle saadaan yhtälö

$$D_{\aleph} = 1 - \left[ \frac{1 + a_{\aleph} - \sqrt{\Phi_{\aleph}(\kappa_{\aleph})}}{a_{\aleph}} \right]^{d_{\aleph}/b_{\aleph}}. \quad (6.19)$$

Kuvissa 6.1 ja 6.2 on myötöjännitykseen suhteutettujen jännityksen, tehollisen jännityksen ja vaurioparametrin kuvaajia eri parametrin  $a_{\aleph}$  ja suhteen  $d_{\aleph}/b_{\aleph}$  arvoilla määritettynä.

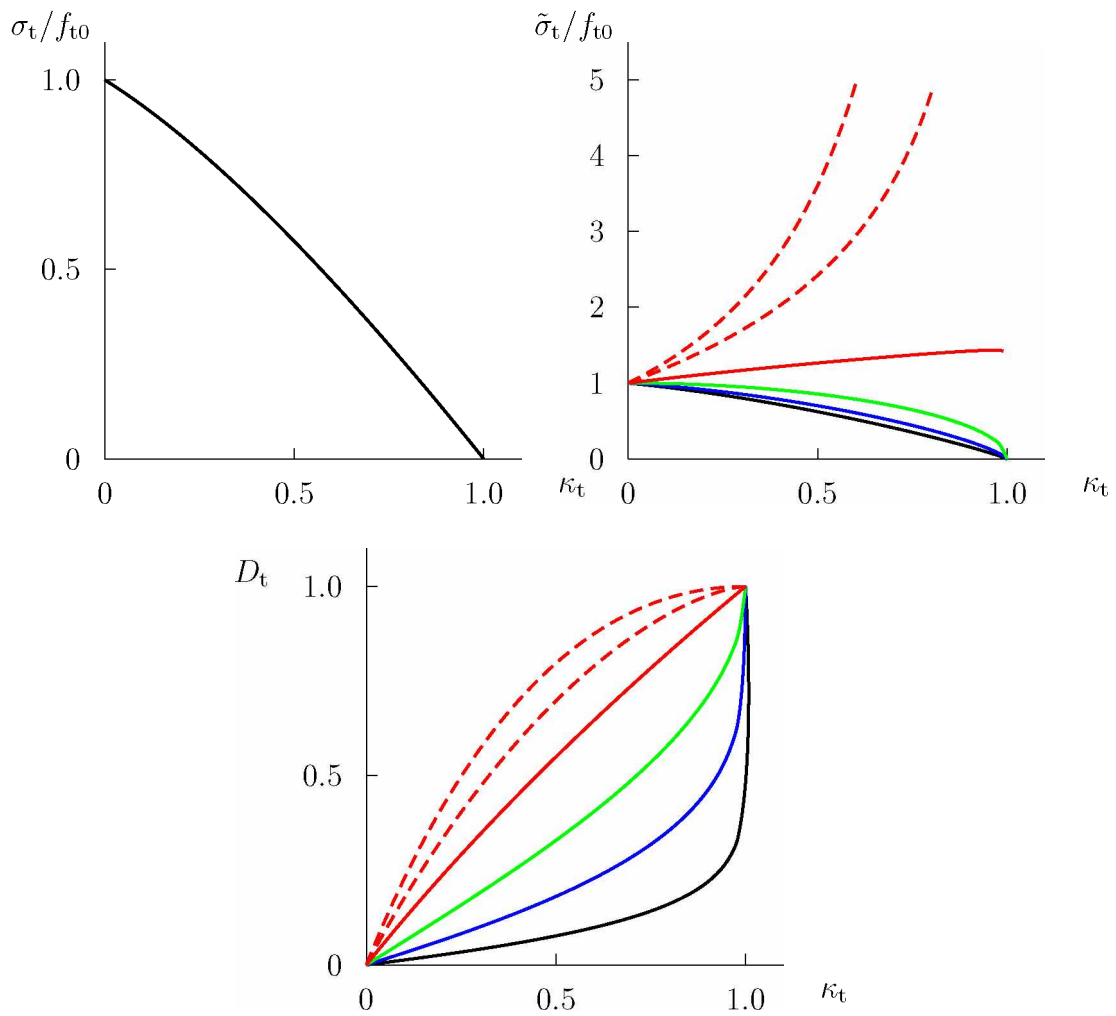
### 6.3.2 Sisäisten muuttujien evoluutioyhtälöt

Yksiaksellisessa tapauksessa sisäisen muuttujan evoluutioyhtälö voidaan kirjoittaa muodossa

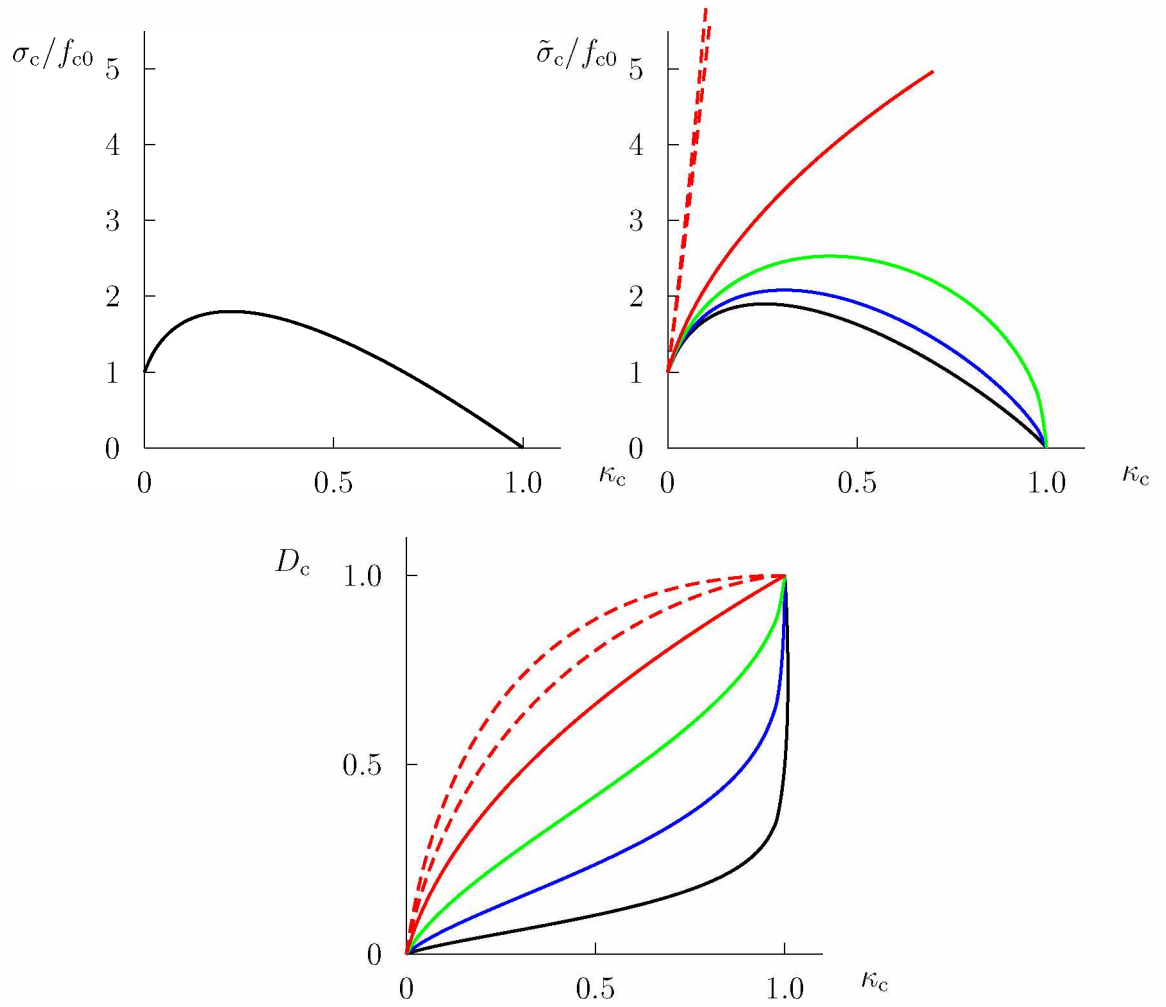
$$\dot{\kappa}_{\aleph} = \frac{f_{\aleph}(\kappa_{\aleph})}{g_{\aleph}} \dot{\varepsilon}^P. \quad (6.20)$$

Yleisessä tapauksessa Leen ja Fenvesin mallissa evoluutiota ohjaa pienin- ja suurin päävenymä. Kootaan sisäiset muuttujat  $\kappa_t, \kappa_c$  pystyvektoriin  $\boldsymbol{\kappa} = [\kappa_t, \kappa_c]^T$  ja merkitään päävenymien  $\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \varepsilon_3$  nopeuksien muodostamaa pystyvektoria  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^P = [\dot{\varepsilon}_1^P, \dot{\varepsilon}_2^P, \dot{\varepsilon}_3^P]^T$ . Sisäisten muuttujien evoluutioyhtälö esitetään muodossa

$$\dot{\boldsymbol{\kappa}} = \mathbf{H}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\kappa}) \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^P, \quad (6.21)$$



Kuva 6.1: Mallin käyttäytyminen vedossa  $a_t < 1$ . Jännitys  $\sigma_t$ , tehollinen jännitys  $\tilde{\sigma}_t$  ja vauriomuuttuja  $D_t$  sisäisen muuttujan  $\kappa_t$  funktiona parametrin  $a_t$  arvolla  $a_t = 0,5$ . Suhde  $d_t/b_t = 0,1$  (musta);  $0,25$  (sininen);  $0,5$  (vihreä);  $1$  (punainen)  $1,5$  ja  $2$  (punaiset katkoviivat).



Kuva 6.2: Mallin käyttäytyminen puristuksessa  $a_c > 1$ . Jännitys  $\sigma_c$ , tehollinen jännitys  $\tilde{\sigma}_c$  ja vauriomuuttuja  $D_c$  sisäisen muuttujan  $\kappa_c$  funktiona parametrin  $a$  arvolla  $a_c = 5$ . Suhde  $d_c/b_c = 0,1$  (musta);  $0,25$  (sininen);  $0,5$  (vihreä);  $1$  (punainen)  $1,5$  ja  $2$  (punaiset katkoviivat).



jossa  $2 \times 3$  matriisi  $H$  määritellään

$$H = \begin{bmatrix} \frac{r(\tilde{\sigma}_i)}{g_t} f_t(\kappa_t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1 - r(\tilde{\sigma}_i)}{g_c} f_c(\kappa_c) \end{bmatrix}. \quad (6.22)$$

Tehollisista pääjännityksistä riippuva painofunktio  $r(\tilde{\sigma}_i) \in [0, 1]$  määritellään

$$r(\tilde{\sigma}) = \frac{\sum_{i=1}^3 \langle \tilde{\sigma}_i \rangle}{\sum_{i=1}^3 |\tilde{\sigma}_i|} = \frac{1}{2} + \frac{I_1}{2(|\tilde{\sigma}_1| + |\tilde{\sigma}_2| + |\tilde{\sigma}_3|)}. \quad (6.23)$$

Plastinen muodonmuutos saadaan plastisen potentiaalin gradienttina

$$\dot{\epsilon}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial g}{\partial \tilde{\sigma}} = \dot{\lambda} \mathbf{n}_g. \quad (6.24)$$

Plastisena potentiaalina Lee ja Fenves käyttivät Drucker-Prager-tyyppistä funktiota

$$g = \sqrt{2J_2} + \alpha_p I_1 = \|\mathbf{s}\| + \alpha_p I_1, \quad (6.25)$$

jossa parametri  $\alpha_p$  määrittää plastisen tilavuudenmuutoksen suuruuden. Lee on väitöskirjassaan [13, Appendix 1] johtanut parametrille  $\alpha_p$  sallitun vaihteluvälin

$$0 \leq \alpha_p \leq \frac{\sqrt{2} - 4\alpha}{2\sqrt{3}(\sqrt{2} - 2\alpha)}. \quad (6.26)$$

### 6.3.3 Vauriomallin mukauttaminen sykliseen kuormitukseen

Yhtälön (6.13) mukaisesti määritelty vauriomuuttuja ei kykene kuvaamaan vaurioituneen materiaalin erilaista käyttäytymistä vuoroin vetävässä ja puristavassa kuormituksessa. Säröjen sulkeutuessa puristavan jännityksen alaisena materiaalin jäykkyys palautuu vauriota edeltävälle tasolle. Tätä särön avautumis/sulkeutumis-käyttäytymistä kuvaamaan Lee ja Fenves muuttivat vaurioparametrin (6.13) määritelmän seuraavaksi

$$D = 1 - (1 - D_c)(1 - sD_t), \quad (6.27)$$

jossa uusi muuttuja  $s$  on jännityksistä riippuvan funktion  $r(\tilde{\sigma})$ , yhtälö (6.23), funktio. Muuttujan  $s$  funktionaalista riippuvuutta ei esitetä Leen väitöskirjassa [13], mutta artikkelissa [14] sille annetaan lauseke

$$s(\tilde{\sigma}) = s_0 + (1 - s_0)r(\tilde{\sigma}), \quad (6.28)$$

jossa  $0 \leq s_0 \leq 1$  asettaa funktion  $s$  minimiarvon.

### 6.3.4 Vauriomallin parametrien määrittäminen

Puristuskokeesta voidaan elastisen vaurioparametrin arvo määrittää maksimikuorman kohdalla. Merkitään tätä arvoa symbolilla  $D'_c$ . Tehollisen jännityksen (6.18) derivaatta sisäisen muuttujan  $\kappa_c$  suhteen on tällöin nolla, jolloin saadaan ehto

$$\sqrt{\Phi_c(\kappa'_c)} = \frac{1}{2}(1 + a_c), \quad (6.29)$$

jossa muuttujan  $\kappa_c$  arvoa jännityksen maksimikohdassa on merkitty  $\kappa'_c$ . Sijoittamalla tämä relaatio puristusvaurion lausekkeeseen (6.19) maksimijännityksen arvolla saadaan yhtälö

$$D'_c = 1 - \left( \frac{1 + a_c - \frac{1}{2}(1 + a_c)}{a_c} \right)^{d_c/b_c}. \quad (6.30)$$

Tämän yhtälön avulla voidaan suhde  $d_c/b_c$  määrittää kokeista mitatun puristusvaurioparametrin arvon  $D'_c$  avulla

$$\frac{d_c}{b_c} = \frac{\log(1 - D'_c)}{\log\left(\frac{1 + a_c}{2a_c}\right)}. \quad (6.31)$$

Parametrin  $a_c$  arvo voidaan määrittää yhtälön (5.117) avulla kun tunnetaan myötölujuus  $f_0$  ja maksimipuristuslujuus  $f_m = f_c$ .

Yksiakselisen vedon tapauksessa Lee ja Fenves otaksuvat vetovaurioparametrille nolla-arvon vetojännityksen maksimin kohdalla. Täten he otaksuvat vetovaurioparametrin arvon  $D''_t$  tunnetuksi pehmenemisalueella kun jännitys saa arvon  $\sigma = f_t/2$ . Tällöin yhtälöstä (6.18) saadaan

$$\sqrt{\Phi_t(\kappa''_t)} = \frac{1}{2}(1 + a_t + \sqrt{1 + a_t^2}). \quad (6.32)$$

Sijoittamalla tämä vaurioparametrin yhtälöön (6.19) saadaan relaatio

$$D''_t = 1 - \left( \frac{1 + a_t - \sqrt{1 + a_t^2}}{2a_t} \right)^{b_t/d_t}. \quad (6.33)$$

Tästä voidaan suhde  $d_t/b_t$  ratkaista  $D''_t$ :n ja  $a_t$ :n funktiona

$$\frac{d_t}{b_t} = \frac{\log(1 - D''_t)}{\log(1 + a_t - \sqrt{1 + a_t^2}) - \log(2a_t)}. \quad (6.34)$$

Parametria  $a_t$  on hankala mitata suoraan kokeista. Tämän vuoksi on käytännöllisempää ilmaista se vaurion  $D''_t$  ja suhteen  $d_t/b_t$  avulla

$$a_t = \frac{2(1 - D''_t)^{b_t/d_t} - 1}{2(1 - D''_t)^{b_t/d_t} [(1 - D''_t)^{b_t/d_t} - 1]}. \quad (6.35)$$

Valitettavasti lähteissä [13, 14] ei esitetä miten suhde  $b_t/d_t$  määritetään kokeellisesti.

# Luku 7

## Abaqus-ohjelman betonimallit

### 7.1 Johdanto

Abaqus on yksi tunnetuimmista erityisesti epälineaaristen ilmiöiden mallintamiseen tarkoitettu rakenneanalyysiohjelmistoista. Betonin kuvaamiseen sen materiaalimallikirjastosta löytyy kolme erilaista mallia: (i) kimmoplastinen, (ii) hauras-halkeilumalli sekä (iii) vaurioituvan aineen kimmoplastinen malli, joka on käytettävissä ohjelmiston sekä standard- että explicit-versioissa. Tässä raportissa esitetään edellä mainituista malleista vain vaurioituvan aineen kimmoplastinen malli, joka on monipuolisin Abaqus-ohjelman betonille soveltuvista malleista.

### 7.2 Vaurioituvan aineen kimmoplastinen malli

Tämä malli perustuu Leen ja Fenvesin malliin, jota on selostettu luvussa 6.3. Siinä yhdistyy isotrooppinen vauriomallin kimmoplastiseen malliin. Mallin perusajatus on kyetä kuvaamaan moniaksiaalista vauriokäyttäytymistä pelkästään yksiakselisten puristus- ja vetokeiden tuloksilla. Jännitys saadaan siten yhtälöstä

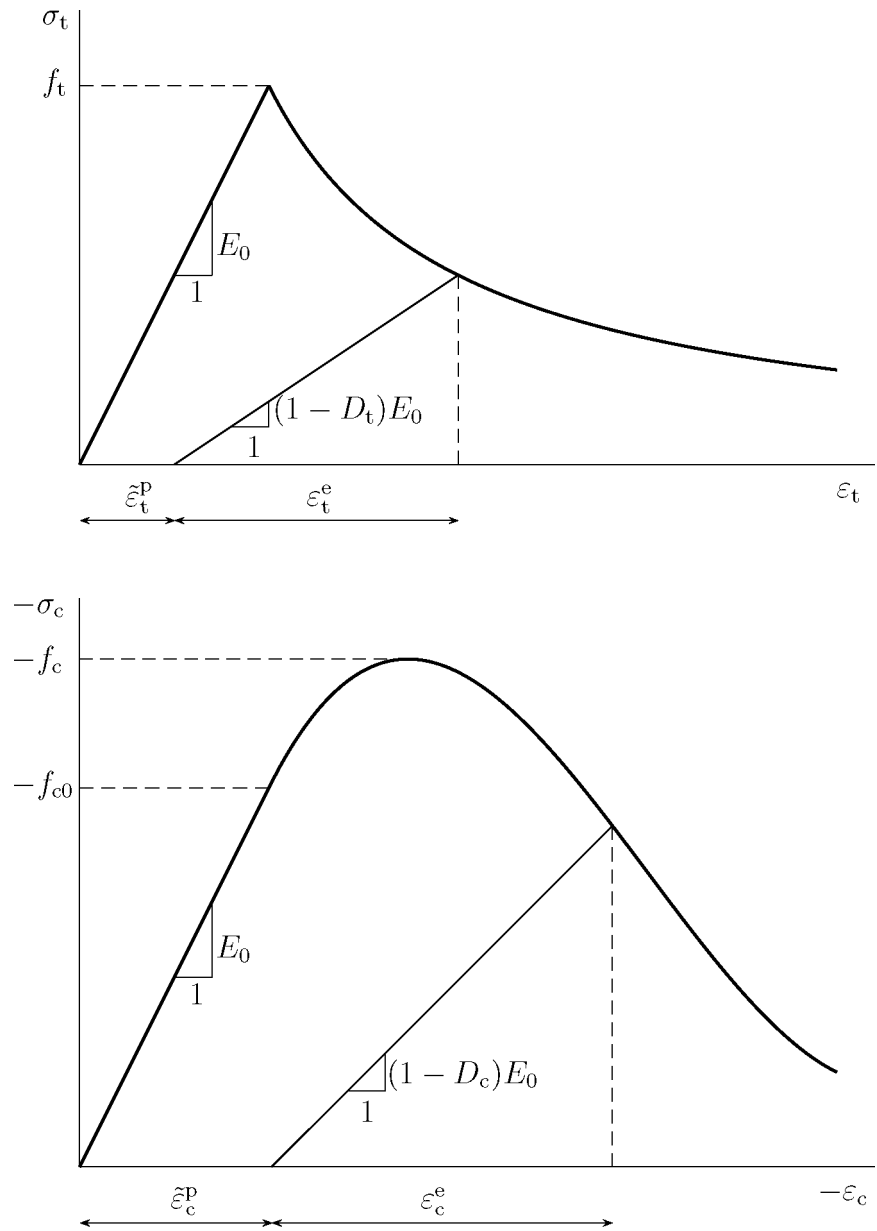
$$\boldsymbol{\sigma} = (1 - D)\mathbf{C}_e\boldsymbol{\varepsilon}^e = (1 - D)\mathbf{C}_e(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^p) = (1 - D)\tilde{\boldsymbol{\sigma}}, \quad (7.1)$$

jossa  $\mathbf{C}_e$  on materiaalin elastisuustensori ja  $D$  on skalaarinen vauriomuuttuja. Myötoehto rajoittaa tehollisen jännityksen sallittua aluetta

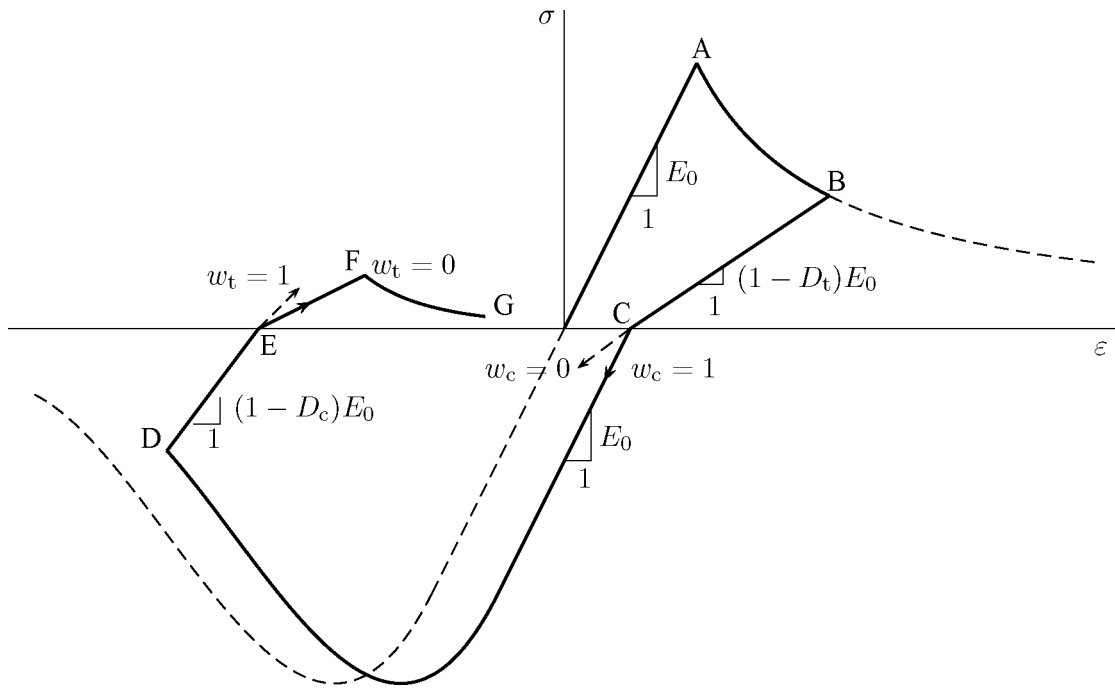
$$\{\tilde{\boldsymbol{\sigma}} | f(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}, \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^p) \leq 0\}, \quad (7.2)$$

jossa sisäistä muuttujaa  $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^p$  kutsutaan ohjelman manuaalissa [1, Luku 4.5.2] ekvivalentiksi plastiseksi muodonmuutokseksi. Se on sama kuin Lublinerin mallin  $\kappa$ , katso yhtälöä (6.21). Vauriomuuttuja  $D$  jaetaan veto- ja puristusvauriota kuvaaviin osuuksiin  $D_t$  ja  $D_c$  seuraavasti

$$D = 1 - (1 - s_c D_t)(1 - s_t D_c) \quad \text{eli} \quad 1 - D = (1 - s_c D_t)(1 - s_t D_c), \quad (7.3)$$



Kuva 7.1: Yksiakselinen käyttäytyminen vedossa ja puristuksessa.



Kuva 7.2: Yksiakselinen veto-puristus-veto kuormitus sykli 0ABCDEF G, jossa otaksuttu ABAQUS-ohjelman oletusarvot painokertoimille  $w_t = 0$  ja  $w_c = 1$ . Puristusta seuraavan vetovaiheen EF jäykkyys on  $E = (1 - D_t)(1 - D_c)E_0$ .

katso kuvaa 7.1. Vaurioparametrien sallittu alue on välillä  $0 \leq D_t, D_c < 1$ . Muuttujat  $s_t$  ja  $s_c$  pyrkivät mallintamaan jäykkyyden palautumista kuormitus suunnan vaihtuessa.

Abaqus-ohjelmistossa jäykkyyden palautuminen on mahdollista sekä puristuksessa että vedossa toisin kuin Leen ja Fenvesin mallissa, jossa se on mahdollista vain siirtäessä vedosta puristukseen. Muuttujat  $s_t$  ja  $s_c$  määritellään yhtälöillä

$$s_t = 1 - w_t H(\tilde{\sigma}_1), \quad (7.4)$$

$$s_c = 1 - w_c (1 - H(\tilde{\sigma}_1)), \quad (7.5)$$

jossa  $H$  on Heavisiden funktio ja painokertoimet  $w_t, w_c$  voivat saada arvoja väliltä  $0 \leq w_t, w_c \leq 1$ . Painokertoimia on havainnollistettu kuvassa 7.2.

Vaurioparametrit  $D_t$  ja  $D_c$  ovat sisäisten tilamuuttujien, eli ekvivalenttien plastisten muodonmuutosten  $\tilde{\varepsilon}_t^p$  ja  $\tilde{\varepsilon}_c^p$  funktioita. Ne voivat olla myös lämpötilan tai joidenkin muiden ennaltamäärättyjen tilamuuttujien funktioita. Ekvivalentit plastiset muodonmuutokset

määritellään erikseen puristus- ja vetorasitustiloissa seuraavasti

$$\tilde{\varepsilon}_t^p = \int_0^t \dot{\tilde{\varepsilon}}_t^p dt, \quad \text{jossa} \quad \dot{\tilde{\varepsilon}}_t^p = r(\tilde{\sigma}) \dot{\varepsilon}_1^p, \quad (7.6)$$

$$\tilde{\varepsilon}_c^p = \int_0^t \dot{\tilde{\varepsilon}}_c^p dt, \quad \text{jossa} \quad \dot{\tilde{\varepsilon}}_c^p = -(1 - r(\tilde{\sigma})) \dot{\varepsilon}_3^p, \quad (7.7)$$

jossa tehollisista jännityksistä  $\tilde{\sigma}$  riippuva painofunktio on määritelty yhtälössä (6.23) sivulla 71.

### 7.2.1 Myötöpinta

Abaqus-ohjelman vaurioituvan aineen kimmoplastisen mallin myötöpinta perustuu Leen väitöskirjassa [13] esitettyyn Lublinerin [18] myötöpinnan muunnelmaan. Ilmaistuna tehollisen  $\sigma_e$  ja keskimääräisen jännityksen  $\sigma_m$  avulla se on<sup>1</sup>

$$f(\tilde{\sigma}_{ij}, \tilde{\varepsilon}_t^p, \tilde{\varepsilon}_c^p) = \frac{1}{1 - \alpha} (\tilde{\sigma}_e + 3\alpha\tilde{\sigma}_m + \beta(\tilde{\varepsilon}_t^p, \tilde{\varepsilon}_c^p)\langle\tilde{\sigma}_1\rangle - \gamma\langle-\tilde{\sigma}_1\rangle) - \tilde{\sigma}_c(\tilde{\varepsilon}_c^p) = 0, \quad (7.8)$$

jossa  $\alpha$  ja  $\gamma$  ovat vakioita. Ne määritellään samaan tapaan kuin yhtälöissä (5.98) ja (5.105), eli<sup>2</sup>

$$\alpha = \frac{f'_{bc0}/f_{c0} - 1}{2(f'_{bc0}/f_{c0}) - 1}, \quad \gamma = 3 \frac{1 - \rho_t/\rho_c}{2(\rho_t/\rho_c) - 1}. \quad (7.9)$$

Parametri  $\beta$  on ekvivalenttien plastisten muodonmuutosten  $\tilde{\varepsilon}_t^p$  ja  $\tilde{\varepsilon}_c^p$  funktio, ja se määritellään yhtälöllä

$$\beta(\tilde{\varepsilon}_t^p, \tilde{\varepsilon}_c^p) = \frac{\tilde{\sigma}_c(\tilde{\varepsilon}_c^p)}{\tilde{\sigma}_t(\tilde{\varepsilon}_t^p)} (1 - \alpha) - (1 + \alpha) \quad (7.10)$$

Efektiiviset puristavat ja vetävät koheesiojännitykset  $\tilde{\sigma}_c$  ja  $\tilde{\sigma}_t$  saadaan yksiakselisten veto- ja puristuskokeiden tuloksina. Ne määritellään yhtälöillä

$$\tilde{\sigma}_c = \frac{\sigma_c}{1 - D_c} = E_0(\varepsilon_c - \tilde{\varepsilon}_c^p), \quad (7.11)$$

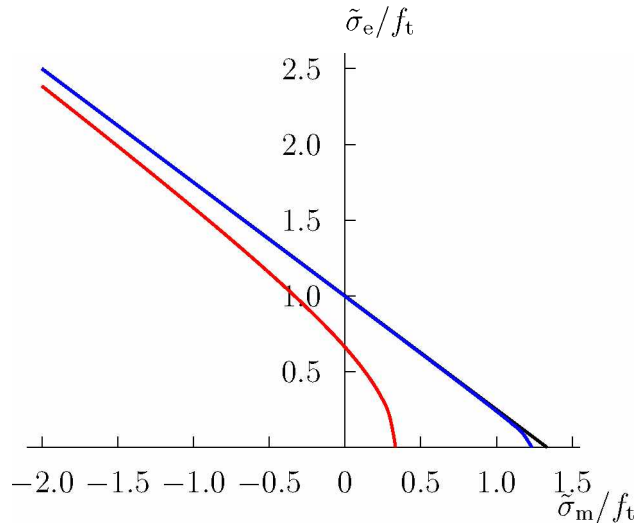
$$\tilde{\sigma}_t = \frac{\sigma_t}{1 - D_t} = E_0(\varepsilon_t - \tilde{\varepsilon}_t^p), \quad (7.12)$$

jossa  $E_0$  on vaurioitumattoman materiaalin kimmokerroin.

Myötöpinnan kuvaaja on esitetty kuvassa 5.11.

<sup>1</sup> Abaqus-ohjelman manuaalissa [1] käytetään jännityksestä  $\sigma_e = \sqrt{3J_2}$  maamekaniikassa hyvin yleisesti käytettyä symbolia  $q$ . Lisäksi myötöehto lausutaan paineen  $p$  avulla, joka on keskimääräisen jännityksen vastaluku  $p = -\sigma_m$ .

<sup>2</sup> Manuaalissa [1] veto- ja puristusmeridiaanien välistä suhdetta  $\rho_t/\rho_c$  merkitään symbolilla  $K_c$ .



Kuva 7.3: Plastisen potentiaalin tasa-arvokäyrät  $G = f_t$  kun  $\tan \psi = 3/4$ : musta viiva  $\epsilon = 0$ , sininen viiva  $\epsilon = 0.1$ , punainen viiva  $\epsilon = 1$ .

## 7.2.2 Plastinen potentiaali

Abaqus-ohjelmaan valittu plastinen potentiaali on muunnos Druckerin-Pragerin tyyppisestä funktiosta, ja se on

$$G = \sqrt{(\epsilon f_{t0} \tan \psi)^2 + \tilde{\sigma}_e^2} + \tilde{\sigma}_m \tan \psi, \quad (7.13)$$

jossa  $\psi$  on meridiaanitasolla  $(\sigma_m, \sigma_e)$  mitattu suuren hydrostaattisen paineen alainen dilataatiokulma ja  $\epsilon$  on eksentrisyysparametri, joka määrittelee kuinka nopeasti potentiaalin tasa-arvoviivat lähestyvät suoraa meridiaanitasolla. Tasa-arvoviivat ovat suoria kun  $\epsilon = 0$ . Kun  $\epsilon \neq 0$  leikkaavat potentiaalin tasa-arvoviivat hydrostaattisen akselin suorassa kulmassa, jolloin plastisen mudonmuutoksen suunta on yksikäsitteisesti määritelty kaikilla sallituilla jännityksen arvoilla.

Plastisen potentiaalin tasa-arvokäyrä  $G = f_t$  on piirretty kuvaan 7.3 muutamilla parametrien  $\epsilon$  arvoilla.

## 7.3 Vauriomallin parametrien lähtötiedot

### 7.3.1 Vauriomallin määrittely vedossa

Vetomurtolujuuden  $f_t$  jälkeinen käyttäytyminen voidaan määritellä Abaqus-ohjelmassa kahdella tavalla: (i) antamalla vetovauriomuuttuja  $D_t$  halkeiluvenymän  $\tilde{\epsilon}_t^{\text{ck}}$  funktiona tai (ii) antamalla vetomurron jälkeinen jännitys halkeamasta johtuvan siirtymän funktiona joko taulukkomuodossa tai antamalla materiaalin säröä ajava voima  $G_f$ .

Halkeiluvenymä  $\tilde{\varepsilon}_t^{\text{ck}}$  (engl. cracking strain) määritellään vedossa venymänä jossa kokonaisvenymästä on vähennetty kimmoinen venymä laskettuna alkuperäisen vaurioitumattoman kimmokertoimen arvolla, eli

$$\tilde{\varepsilon}_t^{\text{ck}} = \varepsilon_t - \varepsilon_{0t}^e = \varepsilon_t - \frac{\sigma_t}{E_0}. \quad (7.14)$$

Abaqus muuntaa halkeiluvenymän automaattisesti ekvivalentin plastisen muodonmuutoksen funktioksi seuraavasti

$$\tilde{\varepsilon}_t^{\text{p}} = \varepsilon_t - \varepsilon_t^e = \tilde{\varepsilon}_t^{\text{ck}} + \frac{\sigma_t}{E_0} - \frac{\sigma_t}{(1 - D_t)E_0}, \quad (7.15)$$

josta saadaan

$$\tilde{\varepsilon}_t^{\text{p}} = \tilde{\varepsilon}_t^{\text{ck}} - \frac{D_t}{(1 - D_t)} \frac{\sigma_t}{E_0}. \quad (7.16)$$

Ekvivalentin plastisen venymän on oltava positiivinen. Virheellinen vauriodata voi tulla ilmi muutettaessa vauriovenymä ekvivalentiksi plastiseksi venymäksi.

Pehmenevän muodonmuutosnopeusriippumattoman materiaalimallin käyttö tavanomaisen Cauchyn kontinuumimallin yhteydessä johtaa vauriovyöhykkeen paikallistumiseen alueeseen, jonka tilavuus on nolla. Tällaisen mallin käyttö numeerisessa laskennassa johtaa pehmenemisalueella verkkoriippuvaan ratkaisuun. Abaquksen manuaalissa varoitetaan tästä ongelmasta. Tästä huolimatta tämä vetovaurion antotapa on mallin käytössä oletusarvo.

Vauriomuuttujan antaminen halkeiluvenymän funktiona edellyttää vauriomuuttujan  $D_t$  määrittämisen koetuloksista, mikä on hankalaa, katso lukua 6.2.

Elementtimenetelmäänalyysissä esiintyvä pehmenevän materiaalimallin aiheuttama verkkoriippuvuusongelma voidaan välttää muuttamalla keinotekoisesti materiaalimallin pehmenemiskäyttäytymistä.

Pehmeneminen vetojännityksen alaisena voidaan määritellä Abaqus-ohjelmassa myös antamalla vetojännitysten arvot halkeamaleveyden (engl. cracking displacement) avulla. Vaihtoehtoisesti ohjelmalle voidaan antaa myös säröä ajava voima  $G_f$ , jolloin Abqus olettaa lineaarisen vetopehmenemisen, jolloin halkeamaleveyden arvo

$$u_{t0} = \frac{2G_f}{f_t} \quad (7.17)$$

vastaa täysin lujuutensa menettänyttä tilaa. Manuaalissa ei ole mainintaa miten halkeiluvenymä käsitellään ohjelmassa. Useissa lähteissä määritellään suurin venymä halkeamaleveyden ja elementin karakteristisen mitan  $h$  avulla seuraavasti

$$\varepsilon_u = \frac{u_{t0}}{h} = \frac{2G_f}{f_t h}. \quad (7.18)$$

Manuaalissa [2, luvussa 20.6.3] esitetyt säröä ajavan voiman arvot 40 N/m ja 120 N/m vastaten lujuusluokan 20 MPa ja 40 MPa betonia ovat varsin pieniä verrattuna lähteen [7] arvoihin, katso yhtälöä (3.3).



### 7.3.1.1 Esimerkki

Otaksutaan, että kokeissa havaittu jännitys-muodonmuutosriippuvuus on bilineaarinen (kuva 7.4)

$$\sigma_t = \begin{cases} E_0 \varepsilon_t & \text{kun } \varepsilon_t \leq \varepsilon'_t = f_t/E_0, \\ -\frac{E_0}{u-1}(\varepsilon_t - \varepsilon_{tu}) & \text{kun } \varepsilon'_t < \varepsilon_t < \varepsilon_{tu}, \end{cases} \quad (7.19)$$

jossa maksimimuodonmuutos määritellään  $\varepsilon_{tu} = u\varepsilon'_t$ , ja jossa venymää maksimijännityksen arvolla on merkitty  $\varepsilon'_t = f_t/E_0$ . Tällöin pehmenevän osuuden lausekeeksi saadaan

$$\frac{\sigma_t}{f_t} = \frac{u - (\varepsilon_t/\varepsilon'_t)}{u - 1}. \quad (7.20)$$

Vaurion etenemiselle on kokeisiin sovitettu venymän  $\varepsilon_t$  avulla lausuttu yhteys

$$D_t = \left[ \frac{1}{u-1} \left( \frac{\varepsilon_t}{\varepsilon'_t} - 1 \right) \right]^k, \quad (7.21)$$

joka toteuttaa ehdot  $D_t = 0$  kun  $\varepsilon_t = \varepsilon'_t$  ja  $D_t = 1$  kun  $\varepsilon_t = u\varepsilon'_t$ . Sijoittamalla pehmenevän osuuden jännitys-venymä yhteys halkeiluvenymän lausekkeeseen (7.15) saadaan

$$\frac{\tilde{\varepsilon}_t^{\text{ck}}}{\varepsilon'_t} = \frac{u}{u-1} \left( \frac{\varepsilon_t}{\varepsilon'_t} - 1 \right). \quad (7.22)$$

Kokonaisvenymän  $\varepsilon_t$  ja vauriovenymän välinen yhteys on vastaavasti

$$\frac{\varepsilon_t}{\varepsilon'_t} = 1 + \frac{u-1}{u} \frac{\tilde{\varepsilon}_t^{\text{ck}}}{\varepsilon'_t}. \quad (7.23)$$

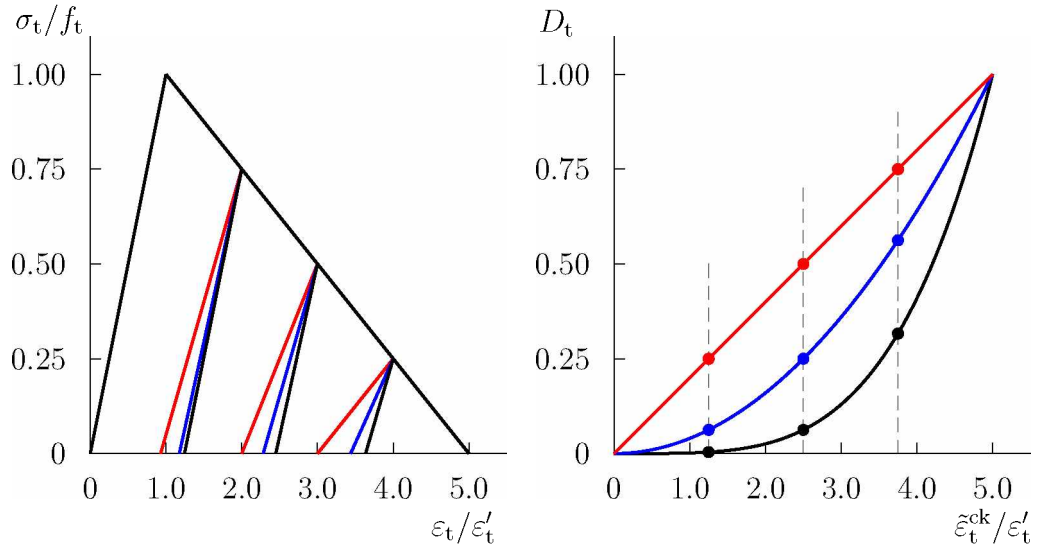
Sijoittamalla tämä lausekkeeseen (7.21) saadaan vauriomuuttujan esitys halkeiluvenymän avulla lausuttuna muotoon (kuva 7.4)

$$D_t = \left( \frac{\tilde{\varepsilon}_t^{\text{ck}}}{u\varepsilon'_t} \right)^k. \quad (7.24)$$

Plastinen muodonmuutos lausuttuna halkeiluvenymän avulla on

$$\frac{\tilde{\varepsilon}_t^{\text{p}}}{\varepsilon'_t} = \frac{\tilde{\varepsilon}_t^{\text{ck}}}{\varepsilon'_t} - \frac{D_t}{(1-D_t)} \frac{\sigma_t}{f_t} = \frac{\tilde{\varepsilon}_t^{\text{ck}}}{\varepsilon'_t} - \frac{(\tilde{\varepsilon}_t^{\text{ck}}/u\varepsilon'_t)^k - (\tilde{\varepsilon}_t^{\text{ck}}/u\varepsilon'_t)^{k+1}}{1 - (\tilde{\varepsilon}_t^{\text{ck}}/u\varepsilon'_t)^k}. \quad (7.25)$$

On helppo osoittaa, että plastinen muodonmuutos on positiivinen ja monotonisesti kasvava mikäli  $k \geq 1$ .



Kuva 7.4: Vauriomallin sovitus koetuloksiin ( $k = 1$  punainen,  $k = 2$  sininen,  $k = 4$  musta). Vasemmanpuoleisessa kuvassa pystysuora katkoviivoitus kuvaa kuormituksen palautuskohtia  $\varepsilon_t = 2\varepsilon'_t$ ,  $3\varepsilon'_t$  ja  $4\varepsilon'_t$ . Palautusvaiheen kimmokertoimista mitatut vaurioparametrien arvot on esitetty ympyröin.

### 7.3.2 Vauriomallin määrittely puristuksessa

Puristusdata annetaan Abaqus-ohjelmalle samoin kuin venymämuotoinen vetodata. Ohjelman manuaali kutsuu vetopuolen halkeiluvienymän vastinetta puristuspuolella epäelastiseksi eli kimmottomaksi venymäksi (engl. inelastic strain). Kimmoton venymä määritellään venymänä, joka saadaan kun puristuvasta kokonaisvenymästä vähennetään vaurioitumattoman tilan kimmokertoimen avulla määritelty kimmainen venymä

$$\tilde{\varepsilon}_c^{\text{in}} = \varepsilon_c - \varepsilon_{0c}^e = \varepsilon_c - \frac{\sigma_c}{E_0}. \quad (7.26)$$

Puristuksen vauriomuuttuja  $D_c$  annetaan tämän kimmottoman venymän  $\tilde{\varepsilon}_c^{\text{in}}$  funktiona, joka muunnetaan plastiseksi venymäksi samaan tapaan kuin yhtälössä (7.16)

$$\tilde{\varepsilon}_c^{\text{p}} = \tilde{\varepsilon}_c^{\text{in}} - \frac{D_c}{(1 - D_c)} \frac{\sigma_c}{E_0}. \quad (7.27)$$

Kuten vetotapauksessakin, vauriodatan virheellisyys voi tulla ilmi tässä vaiheessa.

## Luku 8

# Yhteenvedo

Betonin mekaanisen käyttäytymisen mallintaminen on yksi materiaalimallinnuksen haasteellisimpia tehtäviä. Mallin muodostamista hankaloittavat betonin moninaiset käyttäytymispiirteet, m.m. halkeilu, riippuvuus hydrostaattisesta paineesta sekä Loden kulmasta. Lisäksi betonin käyttäytyminen on aikariippuva.

Tässä raportissa esitetään betonille soveltuvia “klassisia” murtoehtoja sekä Abaqus-elementtimenetelmäohjelmaan implementoitua vaurioituvan aineen elasto-plastista mallia, joka pohjautuu lähteissä [18, 13, 14] esitettyihin malleihin.

Klassisista murtoehdoista esitetään Rankinen maksimijännitysmurtoehto, maksimi-päävenymäehto, Druckerin-Pragerin ehto, Mohrin-Coulombin ehdot, Willamin ja Warnken murtoehdot sekä Ottosenin neliparametrinen murtoehto. Näiden murtoehtojen soveltuvuutta betoniin arvioidaan ja niiden muoto esitetään erilaisissa jännityskoordinaatistoissa, kuten deviatorisella tasolla, meridiaanileikkauksina, tasojännitys- ja tasomuodonmuutostiloissa sekä yhden normaalijännityksen ja leikkausjännityksen tapauksessa. Yhteenvedona voidaan todeta, että Ottosenin neliparametrinen murtoehto kuvaa betonin käyttäytymispiirteitä parhaiten. Hieman yksinkertaisempaa vetokatkaistu Mohrin-Coulombin ehto on kolmiparametrinen myös hyvin käyttökelpoinen. Se tosin aliarvioi biaksiaalista puristuslujuutta eikä se sovellu käytettäväksi hyvin suuren hydrostaattisen puristuksen alaisena suorien meridiaaniviivojensa vuoksi.

Abaqus-ohjelmaan implementoitu vaurioituva kimmoplastinen materiaalmalli edustaa mallia, jonka käyttöalue on pyritty tekemään mahdollisimman laajaksi. Se soveltuu niin dynaamisiin kuin staattisiin kuormitustapauksiin ja se ottaa huomioon halkeilun unilateraalisen luonteen. Vauriomalli kalibroidaan yksiakselisten puristus- ja vetokokeiden tulosten perusteella. Näistä kokeista on saatava täydellinen pehmenemisvyöhykkeelle ulottuva jännitys-venymä riippuvuus. Mallin murtoehdon muodon määrittämiseksi deviatorisella tasolla tarvitaan lisäksi biaksiaalinen puristuslujuus, sekä veto- ja puristusmeridiaanisäteiden suhde. Täten mallin käyttö edellyttää varsin monien kokeiden tekemistä.

## Kirjallisuutta

- [1] *Abaqus, Theory Manual*. Version 6.10.
- [2] *Abaqus, User's Manual*. Version 6.10.
- [3] C. Avram, I. Făcăoaru, I. Filimon, O. Mirsu, and I. Terte. *Concrete Strength and Strains*. Elsevier, 1981.
- [4] G.G. Balmer. Shearing strength of concrete under high triaxial stress—Computation of Mohr's envelope as a curve. Technical Report SP-23, Bureau of Reclamation, Department of the Interior, Structural Research Laboratory, 1949.
- [5] W.F. Chen. *Plasticity in Reinforced Concrete*. McGraw-Hill, 1982.
- [6] K.B. Dahl. A failure criterion for normal and high strength concrete. Technical Report 286, Department of Structural Engineering, Technical University of Denmark, 1992.
- [7] H. Müller et al. Constitutive modelling for high strength/high performance concrete. International Federation for Structural Concrete (fib), January 2008. fib Bulletin 42.
- [8] S.J. Green and S.R. Swanson. Static constitutive relations for concrete. Technical Report AFWL-TR-72-244, Kirtland Air Force Base, Albuquerque, New Mexico, 1973.
- [9] P. Karsan and J.O. Jirsa. Behavior of concrete under compressive loading. *Journal of Structural Division, ASCE*, 95(ST12):2543–2563, December 1969.
- [10] D. Krajcinovic. *Damage Mechanics*, volume 41 of *North-Holland series in Applied Mathematics and Mechanics*. Elsevier Science B.V., Amsterdam, 1996.
- [11] H. Kupfer, H.K. Hilsdorf, and H. Rüsch. Behaviour of concrete under biaxial stresses. *Journal of the American Concrete Institute*, 66(8):656–666, August 1969.
- [12] P. Launay and H. Gachon. Strain and ultimate strength of plain concrete under triaxial stress. In *American Concrete Institute, Special Publication 34*, number 13. 1972.
- [13] J. Lee. *Theory and implementation of plastic-damage model for concrete structures under cyclic and dynamic loading*. PhD thesis, University of California, Berkeley, 1996.

- [14] J. Lee and G.L. Fenves. Plastic-damage model for cyclic loading of concrete structures. *Journal of the Engineering Mechanics Division*, 124(8):892–900, August 1998.
- [15] J. Lemaitre. *A Course on Damage Mechanics*. Springer-Verlag, Berlin, 1992.
- [16] J. Lemaitre and R. Desmorat. *Engineering Damage Mechanics, Ductile, Creep, Fatigue and Brittle Failures*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2005.
- [17] J. Lubliner. *Plasticity Theory*. Pearson Education, Inc., 1990.
- [18] J. Lubliner, J. Oliver, S. Oller, and E. Oñate. A plastic-damage model for concrete. *International Journal of Solids and Structures*, 25(3):299–326, 1989.
- [19] N.S. Ottosen. A failure criterion for concrete. *Journal of the Engineering Mechanics Division*, 103(EM4):527–535, August 1977.
- [20] N.S. Ottosen. Nonlinear finite element analysis of concrete structures. Technical Report Risø-R-411, RisøNational Laboratory, DK-4000 Roskilde, Denmark, May 1980.
- [21] N.S. Ottosen and M. Ristinmaa. *The Mechanics of Constitutive Modeling*. Elsevier, 2005.
- [22] J.G. Rots, P. Nauta, G.M.A. Kusters, and J. Blaauwendraad. Smeared crack approach and fracture localization in concrete. *Heron*, 30(1):1–48, 1985.
- [23] J. Skrzypek and A. Ganczarski. *Modeling of Material Damage and Failure of Structures – Theory and Applications*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1999.
- [24] G.Z. Voyiadjis and P.I. Kattan. *Damage Mechanics*. Taylor & Francis, 2005.
- [25] K. Willam and E.P. Warnke. Constitutive model for the triaxial behaviour of concrete. In *IABSE Proceedings*, volume 19, pages 1–30, 1975. Seminar on Concrete Structures Subjected to Triaxial Stresses, Bergamo, Italy May 17-19, 1974.





